ME - 210 C Probabilidade I
Primeiro semestre de 2024
Lista de exercícios V

1. Resolva os exercícios deixados em sala.

2. Prove que a função abaixo é uma legítima f.d.a bivariada:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \left(\frac{x^2y+xy^2}{2}\right)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(y) + \left(\frac{y+y^2}{2}\right)\mathbb{1}_{(1,\infty)}(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(y) \\ &+ \left(\frac{x^2+x}{2}\right)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{(1,\infty)}(y) + \mathbb{1}_{(1,\infty)}(x)\mathbb{1}_{(1,\infty)}(y) \end{aligned}$$

3. Considere o vetor aleatório $\boldsymbol{Z} = (X,Y)'$, cuja f.d.p conjunta é dada pela tabela abaixo. Responda os itens.

		X		
		-1	0	1
Y	0	1/18	2/18	1/18
	1	4/18	1/18	2/18
	2	2/18	4/18	1/18

a) De que tipo é o ve. $\boldsymbol{Z}$?
b) Obtenha as distribuições marginais de X e Y.
c) Obtenha as esperanças e variâncias de X e Y.
d) Obtenha as distribuições condicionais ($X|Y=y$ e $Y|X=x$).
e) Obtenha as esperanças e variâncias condicionais de ($X|Y=y$ e $Y|X=x$).
f) Calcule a covariância e a correlação entre X e Y.
g) X e Y são probabilisticamente independentes? Justifique sua resposta adequadamente.
h) Obtenha a distribuição conjunta e as marginais de $Z = \max\{X,Y\}$ e $W = \min\{X,Y\}$.

4. Sejam X e Y duas v.a.'s independentes, tais que $X \sim G(p)$ e $Y \sim G(p)$, $p \in (0, 1)$. Defina Z = X + Y.

   a) Calcule a f.d.p. conjunta de (Z,X) e de (Z,Y) .
   b) Qual a distribuição de $X|Z$ e de $Y|Z$. Interprete os resultados que você encontrou.

5. Sejam $(X, Y)'$ um vetor aleatório com f.d.a conjunta $F_{(X,Y)}$ e f.d.a's marginais F_X e F_Y, respectivamente. Prove que

$$F_X(x) + F_Y(y) - 1 \leq F_{(X,Y)}(x, y) \leq \sqrt{F_X(x)F_Y(y)}.$$

   Sugestão: Defina os conjuntos $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$ e $B = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\}$ e analize $P(A), P(B), P(A \cup B), P(A \cap B)$.

6. Sejam X, Y duas variáveis aleatórias com segundos momentos finitos, e seja Z uma outra variável aleatória. Mostre que:

$$Cov(X, Y) = E\left\{Cov[(X, Y)|Z]\right\} + Cov(E(X|Z), E(Y|Z)),$$

   em que,

$$Cov[(X, Y)|Z] := E(XY|Z) - E(X|Z)E(Y|Z).$$

7. Duas moedas (numeradas da 1 a 2) são lançadas simultaneamente e o número de caras é observado (va X). Então, a primeira moeda é novamente lançada. Defina Y o número observado de caras na moeda 2 (primeiro lançamento), somado ao número de caras obtidas na moeda 1 (no segundo lançamento). Responda os itens abaixo:

   a) Obtenha as distribuições marginais de X e Y.
   b) Obtenha as esperanças e variâncias de X e Y.
   c) Obtenha as distribuições condicionais ($X|Y = y$ e $Y|X = x$).
   d) Obtenha as esperanças e variâncias condicionais de ($X|Y = y$ e $Y|X = x$).
   e) Calcule a covariância e a correlação entre X e Y.

f) X e Y são probabilisticamente independentes? Justifique sua resposta adequadamente.

8. Considere a extração, sequencialmente e sem reposição, de duas bolas, de uma urna com três bolas numeradas de 1 a 3. Seja X o número da bola extraída no primeiro lançamento e Y o máximo entre o número das duas bolas. Responda os itens abaixo:

   a) Obtenha as distribuições marginais de X e Y.
   b) Obtenha as esperanças e variâncias de X e Y.
   c) Obtenha as distribuições condicionais ($X|Y = y$ e $Y|X = x$).
   d) Obtenha as esperanças e variâncias condicionais de ($X|Y = y$ e $Y|X = x$).
   e) Calcule a covariância e a correlação entre X e Y.
   f) X e Y são probabilisticamente independentes? Justifique sua resposta adequadamente.

9. Três moedas (numeradas de 1 a 3) são lançadas simultaneamente. Sejam X o número de caras nas duas primeiras moedas e Y o número de coras nas duas últimas. Responda os itens abaixo:

   a) Obtenha as distribuições marginais de X e Y.
   b) Obtenha as esperanças e variâncias de X e Y.
   c) Obtenha as distribuições condicionais ($X|Y = y$ e $Y|X = x$).
   d) Obtenha as esperanças e variâncias condicionais de ($X|Y = y$ e $Y|X = x$).
   e) Calcule a covariância e a correlação entre X e Y.
   f) X e Y são probabilisticamente independentes? Justifique sua resposta adequadamente.

10. Uma urna contem quatro bolas, das quais duas tem o número 1 e as outra duas, o número 2, nelas escritas. Duas bolas são sorteadas, de forma sucessiva e sem reposição. Defina X e Y, respectivamente, o menor e o maior número das duas bolas sorteadas. Responda os itens abaixo:

   a) Obtenha as distribuições marginais de X e Y.
   b) Obtenha as esperanças e variâncias de X e Y.
   c) Obtenha as distribuições condicionais ($X|Y = y$ e $Y|X = x$).

d) Obtenha as esperanças e variâncias condicionais de ($X|Y = y$ e $Y|X = x$).

e) Calcule a covariância e a correlação entre X e Y.

f) X e Y são probabilisticamente independentes? Justifique sua resposta adequadamente.

11. Considere que $P(X = x) = \frac{x}{3}\mathbb{1}_{\{1,2\}}(x)$ e

$$P(Y = y|X = x) = \binom{x}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots,x\}}(y).$$

Responda os itens abaixo:

12. Considere que $X|Y = y \sim$ binomial$(y, p), p \in (0, 1)$ e $Y \sim$ Poisson$(\lambda), \lambda > 0$. Responda os itens abaixo:

a) Obtenha as distribuição conjunto de $\boldsymbol{Z} = (X, Y)'$.

b) Obtenha a distribuição marginal de Y.

c) Obtenha as esperanças e variâncias de X e Y.

d) Obtenha a distribuição condicional $(Y|X = x)$.

e) Obtenha as esperanças e variâncias condicionais de ($X|Y = y$ e $Y|X = x$).

f) Calcule a covariância e a correlação entre X e Y.

g) X e Y são probabilisticamente independentes? Justifique sua resposta adequadamente.

13. Considere $\boldsymbol{Z} = (X, Y)'$ de sorte que sua distribuição conjunta é dada por:

$$f_{\boldsymbol{Z}}(x, y) = \left(\begin{array}{c} m \\ x \end{array}\right)\gamma^{x}(1-\gamma)^{m-x}\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right)\phi^{y}(1-\phi)^{x-y}\mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,m\}}(x)\mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,x\}}ys), \gamma, \phi \in (0, 1)^{2}.$$

Responda os itens abaixo:

a) Obtenha as distribuições marginais de X e Y.

b) Obtenha as esperanças e variâncias de X e Y.

c) Obtenha as distribuições condicionais ($X|Y = y$ e $Y|X = x$).

d) Obtenha as esperanças e variâncias condicionais de ($X|Y = y$ e $Y|X = x$).

e) Calcule a covariância e a correlação entre X e Y.

f) X e Y são probabilisticamente independentes? Justifique sua resposta adequadamente.

14. Considere $\boldsymbol{Z} = (X, Y)'$ de sorte que sua distribuição conjunta é dada por:

$$f(x, y) = \binom{y}{x} \gamma^x (1-\gamma)^{y-x} e^{-\phi} \frac{\phi^y}{y!} \mathbb{1}_{\{0,1,2,\dots\}}(y) \mathbb{1}_{\{0,1,\dots,y\}}(x), \gamma \in (0,1), \phi \in \mathcal{R}^+$$

Responda os itens abaixo:

a) Obtenha as distribuições marginais de X e Y.

b) Obtenha as esperanças e variâncias de X e Y.

c) Obtenha as distribuições condicionais ($X|Y = y$ e $Y|X = x$).

d) Obtenha as esperanças e variâncias condicionais de ($X|Y = y$ e $Y|X = x$).

e) Calcule a covariância e a correlação entre X e Y.

f) X e Y são probabilisticamente independentes? Justifique sua resposta adequadamente.

15. Seja $F(.)$ uma legítima fda (univariada). Verique qual(is) das funções abaixo são legítimas fda'a (bivariadas):

a) $F(x, y) = F(x) + F(y)$.

b) $F(x, y) = F(x)F(y)$.

c) $F(x, y) = \max\{F(x), F(y)\}$.

d) $F(x, y) = \min\{F(x), F(y)\}$.

16. Exercícios do Sheldon Ross:

- Página 271 (problemas): 6, 40.