ME 420 - Inferência Estatística II / ME 419 - Inferência
Primeiro semestre de 2011
Lista de Exercícios II

1. Resolva os exercícios deixados em sala.

2. Considere uma amostra aleatória $X_1, ..., X_n$ de X, em que

$$f_X(x; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\} \mathbb{1}_{(\mu,\infty)}(x), \boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2), \mu \in \mathcal{R}, \sigma > 0.$$

   Responda os itens abaixo

   a) Se μ for conhecido, encontre uma estatística suficiente, minimal e completa. Encontre sua distribuição.
   b) Se σ^2 for conhecido, encontre uma estatística suficiente para μ. Encontre sua distribuição. Esta estatística também é completa?

3. Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)'$ uma amostra aleatória de X, $X \sim FE_1(\theta), \theta \in \Theta \subset I\!R$. Prove que $\mathcal{E}(t(\boldsymbol{X})) = -\frac{d\, d_0(\eta)}{d\eta}$ e $\mathcal{V}(t(\boldsymbol{X})) = -\frac{d^2\, d_0(\eta)}{d\eta^2}$. Sugestão: diferencie uma vez, depois uma segunda, a expressão abaixo, em relação à η:

$$\int_A h(\boldsymbol{x}) \exp^{[t(\boldsymbol{x})\eta + d_0(\eta)]} \, d\boldsymbol{x} = 1\,,$$

   e lembre-se de que $\mathcal{E}(t(\boldsymbol{X})^k) = \int_A t(\boldsymbol{x})^k f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}; \theta) d\boldsymbol{x}, k = 1, 2$, em que A é o suporte da distribuição de $\boldsymbol{X}$.

4. Considere $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)'$ uma amostra aleatória de X. Calcule os estimadores dos momentos, dos parâmetros das distribuições, em cada uma das situações abaixo. No caso dos itens : a), b), e), h), calcule também a distribuição, esperança e variâncias dos estimadores que você obteve.

   a) $X \sim \text{Poisson}(\theta), \theta > 0$.
   b) $X \sim \exp(\theta), \theta > 0$, de sorte que $\mathcal{E}(X) = \theta$.

c) $X \sim$ geométrica(θ), $\theta \in (0, 1)$.

d) $X \sim$ gama$(r, \theta), r, \theta > 0$, r conhecido, $\mathcal{E}(X) = r\theta$

e) $X \sim$ beta$(\theta, 1), \theta > 0$

f) $X \sim$ Normal-inversa$(\mu, \lambda), \mu, \lambda > 0$.

g) $X \sim$ beta$(\alpha, \beta), \alpha > 0, \beta > 0$

h) $X \sim$ log-normal$(\mu, \sigma^2), \mu > 0, \sigma^2 > 0$

5. Considere $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)'$ uma amostra aleatória de X. Calcule os estimadores de máxima verossimilhança, dos parâmetros das distribuições, em cada uma das situações abaixo. No caso dos itens : a), b), e), h), calcule também a distribuição, esperança e variâncias dos estimadores que você obteve.

   a) $X \sim$ Poisson$(\theta), \theta > 0$.

   b) $X \sim \exp(\theta), \theta > 0$, de sorte que $\mathcal{E}(X) = \theta$.

   c) $X \sim$ geométrica(θ), $\theta \in (0, 1)$.

   d) $X \sim$ gama$(r, \theta), r, \theta > 0$, $\mathcal{E}(X) = r\theta$

   e) $X \sim$ beta$(\theta, 1), \theta > 0$

   f) $X \sim$ Normal-inversa$(\mu, \lambda), \mu, \lambda > 0$.

   g) $X \sim$ beta$(\alpha, \beta), \alpha > 0, \beta > 0$

   h) $X \sim$ log-normal$(\mu, \sigma^2), \mu > 0, \sigma^2 > 0$