ME 420 - Inferência Estatística II / ME 419 - Inferência
Primeiro semestre de 2011
Lista de Exercícios I

1. Resolva os exercícios deixados em sala.

2. Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2) \sim N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$, cuja a densidade é dada por:
$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) = \left(\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)^{-1}(2\pi)^{-1} \times$
$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\right\}\mathbb{1}_{\mathcal{R}^2}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\theta} =$
$(\mu_1, \mu_2, \sigma_2, \sigma_2, \rho)$

   Responda os itens:

   a) Calcule as distribuições marginais de $X_1$ e $X_2$.

   b) Obtenha as esperanças e variâncias de $X_1$ e $X_2$, utilizando as distribuições condicionais de $X_1|X_2 = x_2$ e $X_2|X_1 = x_1$. Os resultados coincidem com aqueles obtidos através das distribuições marginais de $X_1$ e $X_2$?

   c) Prove que $X_1$ e $X_2$ são independentes se e somente se forem não correlacionadas.

   d) Obtenha a função geradora de momentos do vetor $\boldsymbol{X}$.

3. Considere $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)'$ uma amostra aleatória de X. Prove que a f.d.p conjunta de $\boldsymbol{X}$ pertencen à família exponencial e identifique cada uma das funções $(h(\boldsymbol{x}), d(\theta), c(\theta), t(\boldsymbol{x}))$, para as situações abaixo.

   a) $X \sim \text{Poisson}(\theta), \theta > 0$.

   b) $X \sim \exp(\theta), \theta > 0$, de sorte que $\mathcal{E}(X) = \theta$.

   c) $X \sim \text{geométrica}(\theta)$, $\theta \in (0, 1)$.

   d) $X \sim \text{gama}(r, \theta), r, \theta > 0$, $\mathcal{E}(X) = r\theta$

   e) $X \sim \text{beta}(\theta, 1), \theta > 0$

   f) $X \sim \text{Normal-inversa}(\mu, \lambda), \mu, \lambda > 0$.

   g) $X \sim \text{beta}(\alpha, \beta), \alpha > 0, \beta > 0$

   h) $f_X(x;\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!(1-e^{-\theta})}\mathbb{1}_{\{1,2,...\}}(x), \theta > 0$

4. Coloque cada uma das f.d.p's conjuntas, da Questão 3, na forma da família exponencial canônica. Calcule a esperança e a variância de cada uma das estatísticas $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{X}) = (t_1(\boldsymbol{X}), ..., t_k(\boldsymbol{X}))$, utilizando as propriedades da família exponencial canônica.

5. Para cada uma das distribuições da Questão 3, encontre estatísticas suficientes para os parâmetros.

6. Considere $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)'$ uma amostra aleatória de X. Encontre estatísticas suficientes para os parâmetros, em cada uma das situações abaixo:

   a) $X \sim U(-\theta, \theta), \theta > 0.$

   b) $X \sim U(\theta_1, \theta_2), 0 < \theta_1 < \theta_2 < \infty.$

   c) $f_X(x; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}} \mathbb{1}_{(\mu,\infty)}(x), \boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma), \mu > 0, \sigma > 0$