ME - 731 Análise Multivariada
Segundo semestre de 2009
Entrega: Exercícios 1, 4, 5 e 6 em 08/09/2009

1. Seja $\boldsymbol{X} \sim N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$, cuja é densidade é dada por:

   $$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \left(\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)^{-1}(2\pi)^{-1} \times$$
   $$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\right\}\mathbb{1}_{\mathcal{R}^2}(\boldsymbol{x})$$

   Prove que X_1 e X_2 são independentes se e somente se forem não correlacioandos.

2. Sejam $X_1, ..., X_n$, variáveis aleatórias independentes tais que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$. Prove que $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)' \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, em que $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, ...\mu_n)'$ e $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$.

3. Exercício 4.13 página 203 do Livro Johson & Wichern. Applied Multivariate Analysis.

4. Seja $\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, qual é a distribuição de $Y = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{X}$. Sugestão: calcule a f.g.m. de Y.

5. Sejam $\boldsymbol{X}1, ..., \boldsymbol{X}_n$, variáveis aleatórios independentes tais que $\boldsymbol{X}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$. Prove que $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, ..., \boldsymbol{X}_n)' \sim N_{np}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, em que $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}_1, ...\boldsymbol{\mu}_n)'$ e $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Sigma}_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \boldsymbol{\Sigma}_n \end{bmatrix}$.

6. Seja $\boldsymbol{X}_1, ..., \boldsymbol{X}_n$ uma a.a. de $X \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Responda os itens:

   a) Encontre o estimadores de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ sob a restrição de que $\boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{b}_0$, em que $\boldsymbol{b}_0$ é um vetor conhecido $(c \times 1)$ e $\boldsymbol{R}$ é uma matriz conhecida de dimensão $c \times p, c \leq p$, de posto coluna completo. Sugestão: Use multiplicadores de Lagrange para maximizar a verossimilhança.

   b) Encontre o teste da razão de verossimilhança (t.r.v) e sua respectiva distribuição assintótica para testar $H_0 : \boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{b}_0$ vs $H_1 : \boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{b}_0$.