ME 714 A - Análise de dados discretos
Primeiro semestre de 2017
Lista de Exercícios I

OBS1: A menos que o contrário seja mencionado, nos exercícios você deve considerar uma amostra aleatória (não necessariamente identidicamente distribuída) $X_1, ..., X$ de $X$ (a variável aleatória, ou vetor aleatório ou o modelo de regressão, especificado na questão).

OBS2: Obter um teste (exato ou assintótico) significa, a menos que o contrário seja mencionado, propor uma estatística do teste que seja apropriada para testar as hipóteses de interesse, sua distribuição sob $H_0$, as regiões crítica e de aceitação, bem como o valor p (p-valor).

1. Resolva os exercícios deixados em sala.
2. Pesquise sobre a distribuição assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança.
3. Pesquise sobre a distribuição assintótica, sob $H_0$, de $\Lambda = -2ln\lambda$, em que $\lambda$ é a estatística do teste da razão de verossimilhanças para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$, em que $\theta$ é um parâmetro (ou vetor de parâmetros) e $\theta_0$ um valor (ou um vetor de valores) conhecido.
4. Revise o conteúdo visto na disciplina de Análise de regressão.
5. Seja $X \sim \text{bin}(m, \theta), \theta \in (0, 1)$, considere m = 1.
   a) Obtenha o estimador de máxima verossimilhança (EMV) de $\theta$, provando que é ponto de máximo, bem como como sua esperança e sua variância exatas.
   b) Obtenha a distribuição assintótica do EMV.
   c) Com base na distribuição assintótica do EMV, obtenha um intervalo de confiança assintótico (ICA), com confiança $\gamma$, para $\theta$.
   d) Com base na distribuição assintótica do EMV, proponha um teste assintótico para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$, em que $\theta_0$ é conhecido.
   e) Obtenha a versão assintótica do teste da razão de verossimilhanças (TRV) para testar as hipóteses apresentadas no item d).
6. Resolva os itens da questão 5, considerando $m$ geral.
7. Resolva os itens da questão 5, considerando que $X \sim \text{Poisson}(\theta), \theta \in (0, \infty)$.
8. Resolva os itens da questão 5, considerando que $X \sim \text{geométrica}(\theta), \theta \in (0, 1)$, ou seja $p(x; \theta) = (1 - \theta)^x \theta \mathbb{1}_{\{0,1,2,...\}}(x)$. Nesse caso $X$ representa o número de fracassos obtidos nas repetições, até se obter o primeiro sucesso.

9. Resolva os itens da questão 5, considerando que $X \sim$ binomial negativa$(r, \theta)$, ($r$ conhecido) ou seja
$$p(x;\theta) = \left( \begin{array}{c} x+r-1 \\ x \end{array} \right) \theta^r \, (1-\theta)^x \, \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots\}}(x).$$
Neste caso $X$ representa o número de fracassos obtidos nas repetições, até se obter $r$ sucessos. Obtenha também sua média e variância de duas formas diferentes. Sugestão: defina a distribuição binomial negativa como soma de va's i.i.d. geométrica$(\theta)$.

10. Seja $X$ uma variável aleatória discreta com suporte no conjunto $A$. A função geradora de probabilidades de $X$, $P_X(t)$, é definida por:
$$P_X(t) = \sum_{x \in A} t^x p(x;\theta).$$
Responda os itens:

    a) Prove que $\frac{\partial^k P_X(t)}{\partial t^k}|_{t=0} = \mathcal{E}\left(\prod_{i=1}^{k}(X-i+1)\right)$.

    b) Obtenha $P_X(.)$ para as distribuições dadas nas questões 5), 6), 7), 8) e 9), desta lista. Sugestão. Para as distribuições binomial e binomial - negativa, use suas definições em termos das distribuições Bernoulli e geométrica, respectivamente.

    c) Utilize os itens a) e b), para obter $\mathcal{E}(X)$ e $\mathcal{V}(X)$ das ditribuições mencionadas no item b).

11. Considere $X_i, i = 1,2,...,n_1$ e $Y_j, j = 1,2,...,n_2$, tais que $X_i \perp Y_j, \forall i,j$, $X_i \overset{i.i.d.}{\sim}$ Bernoulli$(\theta_1)$ e $Y_j \overset{i.i.d.}{\sim}$ Bernoulli$(\theta_2)$, $\theta_i \in (0,1), i = 1,2$. Ou seja, $X_i$ e $Y_j$ são mutuamente independentes. Considere o interesse em testar $H_0: \theta_1 = \theta_2$ vs $H_1: \theta_1 \neq \theta_2$. Responda os itens:

    a) Obtenha os EMV's de $\theta_1$ e $\theta_2$ sob $H_1$ e sob $H_0$, bem como suas esperanças e variâncias exatas.

    b) Obtenha as distribuições assintóticas dos EMV's obtidos no item a).

    c) Com base na distribuição assintótica do EMV, obtenha um intervalo de confiança assintótico (ICA), com confiança $\gamma$, para $\theta$.

    d) Com base na distribuição assintótica do EMV, proponha um teste assintótico para testar as hipóteses de interesse.

    e) Obtenha a versão assintótica do teste da razão de verossimilhanças (TRV) para testar as hipóteses de interesse.

12. Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$trinomial$(m, p_1, p_2)$, com as restrições usuais à dsitribuição multinomial. Resolva os itens:

    a) Escreva a fdp de $\boldsymbol{X}$ com $X_1$ dependendo de $X_2$ e vice-versa.

    b) Obtenha a distribuição marginal de $X_1$, pela definição e, por analogia, a de $X_2$.

    c) Obtenha a distribuição condicional de $X_1|X_2 = x_2$ e, por analogia, a de $X_2|X_1 = x_1$.

13. Pesquisa sobre a distribuição hipergeométrica e escreva a respectiva função indicadora da forma mais apropriada possível. Lembre-se que a distribuição geométrica surge de um experimento parecido com o da binomial mas, sem reposição das unidades experimentais.

14. Considere o modelo de regresão linear simples normal, ou seja $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \xi_i$, $x_i, i = 1, 2, ..., n$ conhecidos, e $\xi_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2)$. Encontre os estimadores de mínimos quadrados de $\boldsymbol{\theta} = (\beta_1, \beta_1)'$, suas respectivas distributições marginais (exatas) e sua distribuição conjunta (exata).