ME 731 - Métodos em Análise Multivariada
Segundo semestre de 2021
Lista de Exercícios 0

OBS: Nas questões envolvendo a obtenção do teste da razão de verossimilhanças (TRV) você deverá obter a estatística $\Lambda = \dfrac{L(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0)}{L(\widehat{\boldsymbol{\theta}})}$, em que $L(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0), L(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$ são, respectivamente, a verossimilhança maximizada sob H_0 e irrestritamente, depois a estatística $\lambda = -2\ln\Lambda$, apresentando a respectiva distribuição assintótica desta última, simplificando ambas as estatísticas o máximo possível. Para a versão assintótica do teste, você deverá apresentar as regiões de aceitação e crítica, bem como o p-valor associado ao teste.

1. Resolva os exercício deixados em sala de aula.
2. Seja $X_1, X_2, ..., X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathcal{R}$ e $\sigma^2 \in \mathcal{R}^+$, ambos desconhecidos. Responda os itens:

   a) Escreva a densidade conjunta da amostra em termos da família exponencial, ou seja, $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = a(\boldsymbol{\theta})b(\boldsymbol{x})\exp\left[\sum_{i=1}^{2} c_i(\boldsymbol{\theta})d_i(\boldsymbol{x})\right]$, em que $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$ e $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)'$.

   b) Encontre uma estatística suficiente para $\boldsymbol{\theta}$.

   c) Encontre os estimadores de máxima verossimilhança de (μ, σ^2).

   d) Proponha um prodecimento estatístico para testar as hipóteses $H_0 : \mu = \mu_0$, vs, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (em que μ_0 é uma constante conhecida), ou seja, proponha uma estatística de teste e obtenha: sua distribuição sob H_0, sua distribuição sob H_1, as regiões crítica e de aceitação associadas e a função poder do teste.

   e) Calcule o teste da razão de verossimilhanças para testar as hipóteses definidas no item d) e encontre sua respectiva distribuição assintótica.

3. Considere o modelo de regressão normal linear em forma matricial, ou seja:

$$\boldsymbol{Y}_{(n\times 1)} = \boldsymbol{X}_{(n\times k)}\boldsymbol{\beta}_{(k\times 1)} + \boldsymbol{\xi}_{(n\times 1)},$$

   em que

   $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_n)'$ é o vetor com as variáveis resposta, $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & ... & X_{1k} \\ X_{21} & X_{22} & ... & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & ... & X_{nk} \end{bmatrix}$

é a matriz com as variáveis explicativas, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_k)'$ é o vetor de parâmetros e $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_n)' \sim N(\mathbf{0}_n, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n)$, em que $\boldsymbol{I}_n$ denota uma matriz identidade de ordem n.

Responda os itens:

a) Encontre o estimador de mínimos quadrados de $\boldsymbol{\beta}$, e denote-o por $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$.

b) Encontre a distribuição exata de $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$.

c) Proponha uma estatística para testar a hipótese $\beta_k = \beta_{0k}$, em que β_{0k} é uma constante conhecida, e encontre sua distribuição sob H_0.