1. Questão 1

a) Temos que:

$$f_Y(y) = \frac{y}{2\sigma^2} \exp\left\{-\frac{y}{2\sigma^2}\right\} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) = \exp\left\{-\frac{y}{2\sigma^2} - 2\ln\sigma + \ln y - \ln 2\right\},$$

em que $\theta = -\frac{1}{2\sigma^2} \to \sigma = \sqrt{\frac{1}{-2\theta}}$, $b(\theta) = 2\ln\sigma = \ln(-2\theta)$, $c(y,\phi) = \ln y - \ln 2$. Além disso

$$\mathcal{E}(Y_1) = -\frac{1}{\theta} = 2\sigma^2, \mathcal{V}(Y_1) = \frac{1}{\theta^2} = 4\sigma^2.$$

b) Temos que:

$$f_Y(y) = \frac{y}{\mu} \exp\left\{-\frac{y}{\mu}\right\} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) = \exp\left\{-\frac{y}{\mu} - \ln\mu + \ln y\right\},$$

em que $\theta = -\frac{1}{\mu} \to \mu = \frac{1}{-\theta}$, $b(\theta) = \ln\mu = -\ln(-\theta)$, $c(y,\phi) = \ln y$.

c) Temos que ($\mu_i = e^{\beta x_i}$):

$$\begin{aligned}
L(\beta) &\propto \prod_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\mu_i}\right\} \to l(\beta) = \beta \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{e^{\beta x_i}} \\
S(\beta) &= n\overline{x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i x_i}{e^{\beta x_i}}; H(\beta) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i x_i^2}{e^{\beta x_i}} \\
I(\beta) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i x_i^2}{e^{\beta x_i}} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2
\end{aligned}$$

d) Temos que:

$$l(\boldsymbol{\mu}^{(0)}, \boldsymbol{y}) \;\; = \;\; -n$$

$$(\mu_i = e^{\beta x_i}) l(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{y}) \;\; = \;\; -\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{y_i}{\mu_i}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\mu_i}$$

Assim

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\mu}) &= 2\sum_{i=1}^{n}\left[-1 + \ln\left(\frac{\mu_i}{y_i}\right) + \frac{y_i}{\mu_i}\right] \\ &= 2\sum_{i=1}^{n}\left[-1 + \beta x_i - \ln y_i + \frac{y_i}{e^{\beta x_i}}\right] \end{aligned}$$

2. Questão 2

a) Temos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{y=0}^{\infty} g_Y(y) &= \sum_{y=0}^{\infty} \left\{ [\theta + (1-\theta) f_Z(0)] \, \mathbb{1}_{\{0\}}(y) + (1-\theta) f_Z(y) \right\} \\
&= \theta + (1-\theta) f_Z(0) + (1-\theta)(1 - f_Z(0)) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Além disso:

- Se $y = 0$, então $g_Y(y) = \theta + (1-\theta) f_Z(0) \in (0,1)$ pois $\theta, f_Z(0) \in (0,1)$.
- Se $y \in \{1, 2, ...\}$, então $g_Y(y) = (1-\theta) f_Z(y) \in (0,1)$ pois $\theta, f_Z(y) \in (0,1), \forall y$.

Logo $g_Y$ é uma legítima fdp.

b) Temos que:

$$\mathcal{E}(Y) = \sum_{y=0}^{\infty} y g_Y(y) = (1-\theta) \sum_{y=0}^{\infty} y f_Z(y) = (1-\theta)\mathcal{E}(Z) = (1-\theta)\mu_Z$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(Y^2) &= \sum_{y=0}^{\infty} y^2 g_Y(y) = (1-\theta) \sum_{y=0}^{\infty} y^2 f_Z(y) = (1-\theta) \left( \mathcal{V}(Z) + \mu_Z^2 \right) \\
&= (1-\theta)(\sigma_Z^2 + \mu_Z^2)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{V}(Z) = (1-\theta) \left( \sigma_Z^2 + \mu_Z^2 - \mu_Z^2 + \theta \mu_Z^2 \right) = (1-\theta) \left( \sigma_Z^2 + \theta \mu_Z^2 \right)$$

c) Temos que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(Y) &= (1-\theta) \frac{1-p}{p} \\
\mathcal{V}(Y) &= (1-\theta) \left( \frac{1-p}{p^2} + \theta \frac{(1-p)^2}{p^2} \right) \\
&= \frac{(1-\theta)(1-p)}{p^2} \left( 1 + \theta(1-p) \right)
\end{aligned}$$

d) Temos que:

$$\begin{aligned}
P(Y=0) &= P(Y=0|U=0)P(U=0)+P(Y=0|U=1)P(U=1) \\
&= \theta \\
(y \in \{1,2,...\}) P(Y=y) &= P(Y=y|U=0)P(U=0)+P(Y=y|U=1)P(U=1) \\
&= (1-\theta)P(Z=y)
\end{aligned}$$

Portanto, temos que:

$$P(Y=y) = g_Y(y) = [\theta + (1-\theta)f_Z(0)]\,\mathbb{1}_{\{0\}}(y) + (1-\theta)f_Z(y)\mathbb{1}_{\{1,2,\ldots,\}}(y)$$

3. Questão 3

a) Temos que

$$
\begin{aligned}
L(\sigma^2) &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2e^{\beta}}\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right\}\left(e^{\beta}\right)^{-n/2} \rightarrow l(\beta) = c - \frac{n}{2}\beta - \frac{1}{2e^{\beta}}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\
S(\beta) &= -\frac{n}{2} + \frac{1}{2e^{\beta}}\sum_{i=1}^{n} y_i^2, H(\beta) = -\frac{1}{e^{\beta}}\sum_{i=1}^{n} y_i^2, I(\beta) = n
\end{aligned}
$$

b) Temos que

Sob $H_0$, $\widehat{\beta} = 0$, portanto

$$l(0) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 + c$$

Por outro lado, temos que, de forma irrestrita, que

$$S(\widehat{\beta}) = 0 \to e^{\widehat{\beta}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \to \widehat{\beta} = \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right)$$

Portanto

$$l(\widehat{\beta}) = -\frac{n}{2}\widehat{\beta} - \frac{n}{2} + c = -\frac{n}{2}(\widehat{\beta} + 1) + c$$

Por outro lado, temos que

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\left(\widehat{\beta} + 1\right).$$

Logo, rejeita-se $H_0$ se $p < \alpha$, em que $\alpha$ é o nível de significância adotado, $p = P(X > \lambda^*)$, $X \sim \chi^2_{(1)}$ e

$$\lambda^* = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\left(\widetilde{\beta} + 1\right).$$

4. Questão 4

   a) O RCD apresenta uma variabilidade variável, tanto em função dos índices das observações bem como dos valores preditos (Figura 1). Isso indica uma variabilidade não capturada pelo modelo. Além disso, pela Figura 2, o RCD apresenta uma rotação no sentido anti-horário, com a quase totalidade dos pontos fora do envelope. Finalmente, nos wormplots percebemos a mesma rotação no sentido anti-horário, com os pontos totalmente distantes do valor zero.Esses resultados indicam um péssimo ajuste do modelo.

   b) Dadas as informações adicionais e o padrão descrito no item anterior, tem-se fortes indícios da presença de superdispersão dos dados, o que não é contemplada pelo modelo de Poisson.

   c) Pela Figura 4 tem-se que os RQA's estão dodos dentro das bandas de confiança, sem apresentar sistematicidade. Ademais, os wormplots são muito parecidos entre si, sendo que em todos eles os RQA's estão aleatoriamente dispersos ao longo do zero. Essas evidências indicam que o modelo está bem ajustado. Consequentemente, pelo exposto no item a), o ajuste do Modelo M2 fora melhor que o Modelo M1.

   d) Sim, esperava, pois o mal ajuste provavelmente se deu por conta da superdispersão nos dados e, uma vez que o modelo beta-binmomial contempla superdispersão, esperava-se um ajuste melhor do modelo M2.