

# Introdução à Teoria da Resposta ao Item

Prof. Caio Azevedo

- Traço latente: característica não-observável.
- Exemplo: conhecimento, grau de maturidade, nível de depressão, predisposição de adquirir um produto, grau de aceitação à pena de morte (entre outros).
- Conhecimento: “domínio” sobre algum assunto.
- Como medir conhecimento (traços latentes de forma geral)?
  - Quantificar
  - Interpretar
- Traços (variáveis) latentes também são úteis para explicar processos não observáveis/observados (ausência de covariáveis), obter independência (condicional), modelar dependência, explicar/modelar variabilidade, criar distribuições de probabilidade entre outras possibilidades.

## ■ Teoria Clássica de Medidas

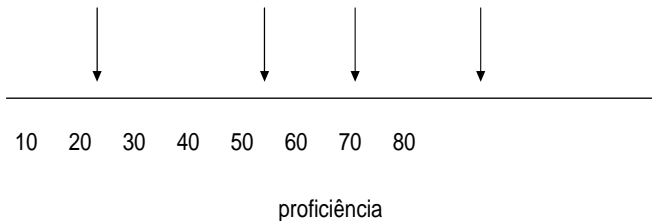
- **Score total (respondente):** no. de acertos (itens dicotômicos) varia de 0 a I (no. de itens). Também podemos trabalhar com a proporção de acertos.
- **Índice de dificuldade (item):** proporção ou porcentagem de acerto varia de 0 a 1.
- **Índice de discriminação (item):** diferença entre a porcentagem de acerto do grupo superior e a porcentagem de acerto do grupo inferior varia de -1 a 1.
  - Grupo superior: 27% dos respondentes com os escores mais altos
  - Grupo inferior: 27% dos respondentes com os escores mais baixos
  - Outros percentuais podem ser utilizados (0.25,0.33).
- **Correlação ponto bisserial:** correlação de Pearson entre o escore (# de acertos) e a resposta do indivíduo ao item.

- O que significa um indivíduo obter uma nota maior que outro ?
- Os indivíduos tem de ser submetidos ao mesmo teste (ou testes equivalentes).
- Como comparar indivíduos submetidos à testes diferentes?
- Como analisar as características de um teste ?
- Como avaliar o que, de fato, um indivíduo sabe ?
- Como medir o ganho de conhecimento de indivíduos, ao longo do tempo ?

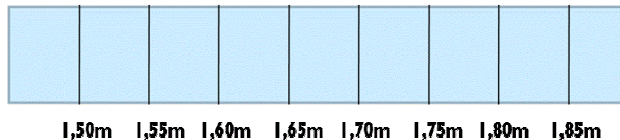
- Proficiências: traços latentes (construtos)
  - Não é possível observá-las diretamente.
  - Diferentemente da altura ou renda, é necessário se estabelecer uma métrica (régua).
  - Conhecimento, predisposição para manifestar alguma doença, grau de maturidade de uma empresa na implementação da gqt (gestão pela qualidade total), nível de depressão.
  - Escala de proficiência: régua na qual se podem colocar os “traços latentes dos indivíduos”.
  - Cumulativo (cognição, nível de depressão) ou não cumulativo (opinião, grau de aceitação).

- O que significa “medir” traços latentes?
  - É o processo por meio do qual números são atribuídos aos objetos (itens e respondentes), tais que a relação entre objetos é representada pela relação entre números.
- Uma das maiores contribuições da TRI foi propor modelos que permitem que itens e indivíduos possam ser posicionados na mesma régua.

# Escala de proficiência : régua



# Régua para altura





# Medida: “brincando” com a altura

- 1 Na cama, eu frequentemente sinto frio nos pés.
- 2 Eu frequentemente desço as escadas de dois em dois degraus.
- 3 Eu acho que me daria bem em um time de basquete.
- 4 Como policial, eu impressionaria muito.
- 5 Na maioria dos carros eu me sinto desconfortável.
- 6 Eu literalmente olho para meus colegas de cima para baixo.
- 7 Você é capaz de pegar um objeto no alto de um armário, sem usar escada?
- 8 Você abaixa quando vai passar por uma porta?
- 9 Você consegue guardar a bagagem no porta-malas do avião?
- 10 Você regulava o banco do carro para trás?
- 11 Normalmente quando você está andando de carona lhe oferecem o banco da frente?
- 12 Quando você e várias pessoas vão tirar fotos, formando-se três fileiras, onde ninguém ficará agachado, você costuma ficar atrás?
- 13 Você tem dificuldade para se acomodar no ônibus?
- 14 Em uma fila, por ordem de tamanho, você é sempre colocado atrás?

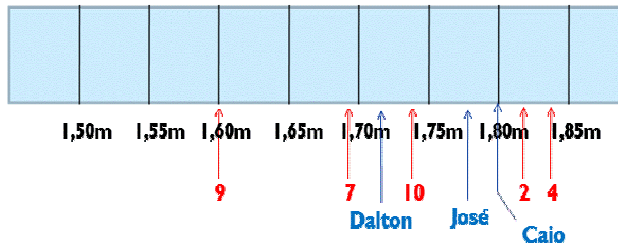
# Medida: “brincando” com a altura

- 1 Na cama, eu frequentemente sinto frio nos pés.
- 2 **Eu frequentemente desço as escadas de dois em dois degraus.**
- 3 Eu acho que me daria bem em um time de basquete.
- 4 **Como policial, eu impressionaria muito.**
- 5 Na maioria dos carros eu me sinto desconfortável.
- 6 Eu literalmente olho para meus colegas de cima para baixo.
- 7 **Você é capaz de pegar um objeto no alto de um armário, sem usar escada?**
- 8 Você abaixa quando vai passar por uma porta?
- 9 **Você consegue guardar a bagagem no porta-malas do avião?**
- 10 **Você regulava o banco do carro para trás?**
- 11 Normalmente quando você está andando de carona lhe oferecem o banco da frente?
- 12 Quando você e várias pessoas vão tirar fotos, formando-se três fileiras, onde ninguém ficará agachado, você costuma ficar atrás?
- 13 Você tem dificuldade para se acomodar no ônibus?
- 14 Em uma fila, por ordem de tamanho, você é sempre colocado atrás?

# Posicionamento dos respondentes e dos itens na mesma escala



# Posicionamento dos respondentes e dos itens na mesma escala

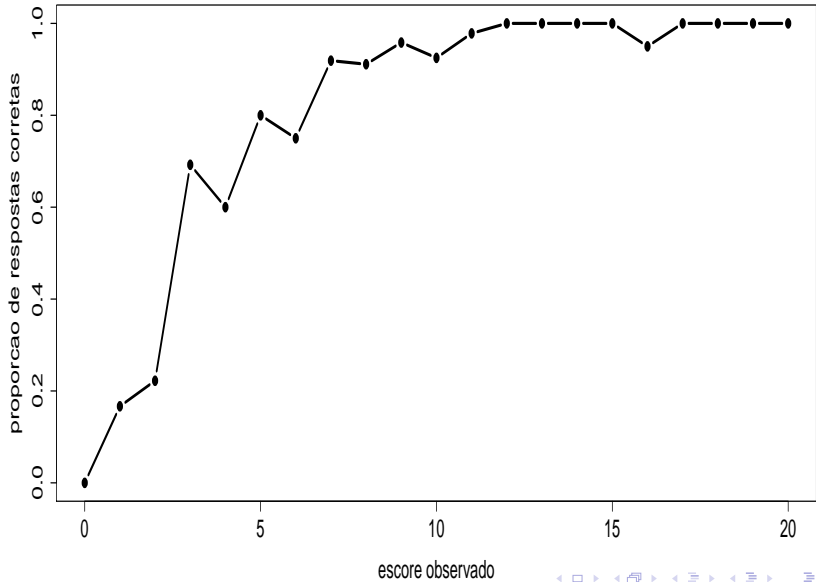


1

- Teoria psicométrica desenvolvida para suprir necessidades na área educacional. É composta por conjunto de modelos que consideram variáveis latentes.
- Modelos de Resposta ao Item (MRI) : representam o relacionamento entre traços latentes de indivíduos e itens de um instrumento de medida (prova, questionário). Tal modelagem consiste na probabilidade de obter um certo escore em cada item.
- Existe um grande número de classes de MRI : dicotômicos e politômicos, um e múltiplos grupos, multidimensionais, longitudinais multiníveis, entre outros.
- Aplicada em diversas áreas: educação, marketing, psiquiatria, genética etc.

- Surgiu, formalmente, a partir dos trabalhos de Lord (1952) e Rasch (1960).
- No Brasil vem sendo usada extensamente em avaliação educacional SAEB, ENADE, ENEM, ...
- No mundo: TOEFL, GRE, PISA, ...
- É parte fundamental dos exames vestibulares das universidades federais

- A probabilidade de uma certa resposta a um item é modelada como função da proficiência do indivíduo e os parâmetros que representam algumas propriedades dos item.
- Modelo para traços latente cumulativos: quanto maior a proficiência do indivíduo, maior a probabilidade de uma resposta correta.
- Modelo para traços latente não-cumulativos (desdobramento): quanto mais próxima a proficiência do indivíduo estiver do atributo de interesse, maior a probabilidade do indivíduo apresentar tal atributo.
- Propriedade da invariância: os parâmetros dos itens e as proficiências são invariantes, exceto pela escolha da escala (métrica).





# Estrutura mais simples de modelos da TRI

- $Y \sim D(\mu)$ ,  $\mathcal{E}(Y) = \mu$ ,  $g(\mathcal{E}(Y)) = \eta$ .
- Y pode apresentar as mais diversas estruturas: dicotômica, politômica, contínua (real, positiva, limitada), contagem etc.
- A distribuição de Y pode depender de outros parâmetros (e.g,  $Y \sim \text{beta}(\mu, \phi)$ ).
- Assim, temos a parte aleatória ( $D(\cdot)$ ) e a parte determinística ( $g(\mathcal{E}(Y)) = \eta$ ).
- Se Y tiver uma estrutura dicotômica, então  $\mathcal{E}(Y)$  corresponderá a probabilidade de sucesso, por exemplo.

## Formalização da TRI

- 1ª hipótese (Rasch, 1960):  $\eta_i = \theta - b_i$ .
  - $b_i$  é a dificuldade do item  $i$ .
  - Modelo de Rasch ou de 1 parâmetro.
- 2ª hipótese (Lord, 1952; Birnbaum, 1957):  $\eta_i = a_i(\theta - b_i)$ .
  - $a_i$  é a discriminação do item  $i$ .
  - Modelo de 2 parâmetros.

- Vamos agora tratar da parte aleatória.
- Vários tipos possíveis de resposta:
  - Dicotômica (certo = 1 ou errado = 0).
  - Politômica: nominal ou ordinal.
  - Contínua.
  - Contagem.
  - Limitada (contínua)
- Vamos nos concentrar em respostas dicotômicas (múltipla escolha), por enquanto.

- Existem 2 valores possíveis para  $Y$ : 0 e 1
- Logo, usaremos a distribuição de Bernoulli onde  $P(Y = 1) = p$ .
- Como  $\mathcal{E}(Y) = p$ , tenderíamos a fazer:  $p = \eta = a_i(\theta - b_i)$ .

- Problema:  $0 \leq p \leq 1$  e  $-\infty \leq \eta \leq \infty$ .
- Precisamos transformar  $\eta$  para  $[0, 1]$
- Qualquer f.d.a de v.a. na reta serve a tal propósito.
- Algumas das transformações usadas: f
  - $\Phi(X)$  - f.d.a. da Normal .
  - $F(x) = \frac{1}{1 + e^{(-x)}}$  - f.d.a. logística.
- Vamos nos concentrar na logística, mas ambas são, relativamente, parecidas.
- Outras distribuições (funções de ligação) podem ser consideradas.

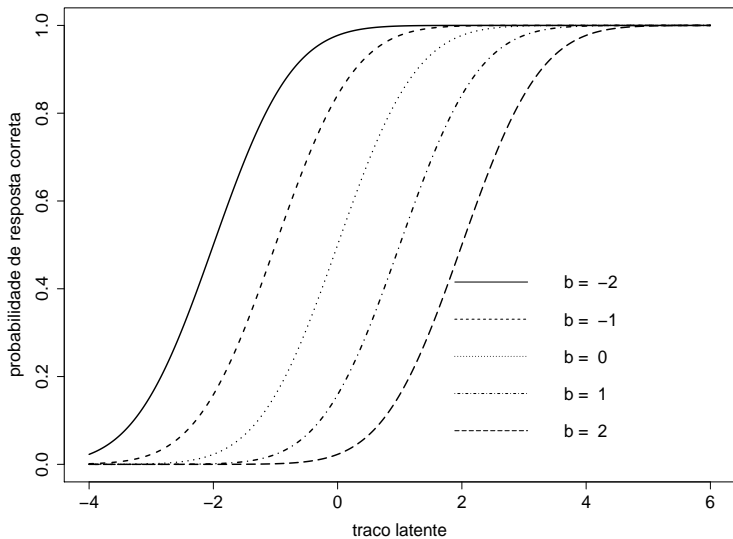
- **Modelo logístico de 1 parâmetro** : Seja  $Y_{ij}$  a resposta do indivíduo  $j$  ao item  $i$ .

$$Y_{ij} | (\theta_j, b_i) \sim \text{Bernoulli}(p_{ij}),$$

$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1 | \theta_j, b_i) = \frac{1}{1 + e^{-(\theta_j - b_i)}}$$

- $\theta_j$ : traço latente do indivíduo  $j$ . Suposição usual  $\theta_j \sim N(0, 1)$ .
- $b_i$ : parâmetro de dificuldade (posição) do item  $i$ .

Curvas do modelo L1P



- **Modelo logístico de 2 parâmetros** : Seja  $Y_{ij}$  a resposta do indivíduo  $j$  ao item  $i$ .

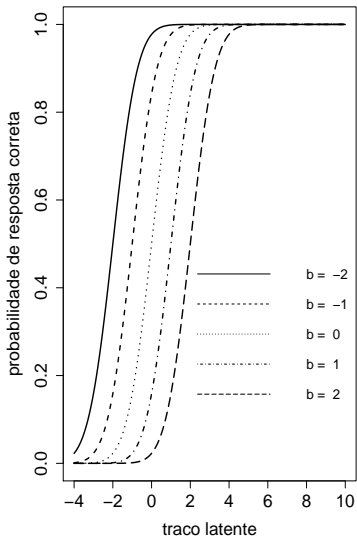
$$Y_{ij} | (\theta_j, \zeta_i) \sim \text{Bernoulli}(p_{ij}),$$

$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1 | \theta_j, \zeta_i) = \frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta_j - b_i)}}$$

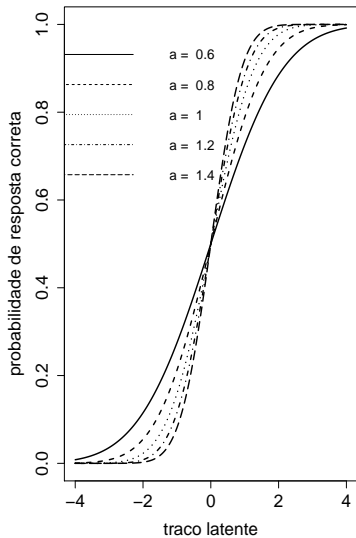
- $\theta_j$ : traço latente do indivíduo  $j$ . Suposição usual  $\theta_j \sim N(0, 1)$ .
- $\zeta_i = (a_i, b_i)'$ .
- $a_i$ : parâmetro de discriminação (escala) do item  $i$ .
- $b_i$ : parâmetro de dificuldade (posição) do item  $i$ .



Curvas do modelo L2P



Curvas do modelo L2P

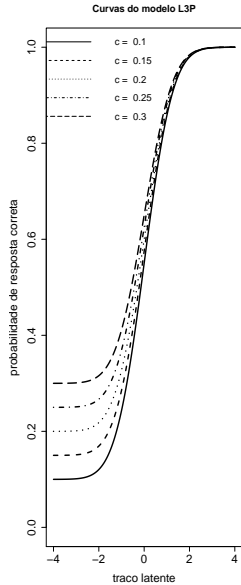
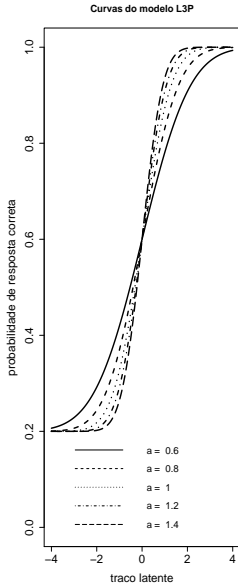
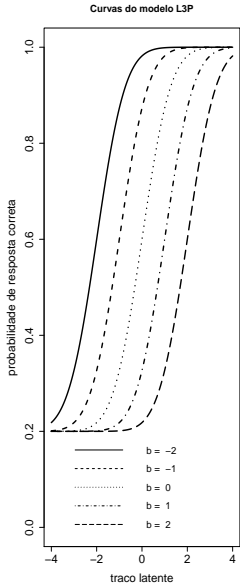


- **Modelo logístico de 3 parâmetros** : Seja  $Y_{ij}$  a resposta do indivíduo  $j$  ao item  $i$ .

$$Y_{ij} | (\theta_j, \zeta_i) \sim \text{Bernoulli}(p_{ij}),$$

$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1 | \theta_j, \zeta_i) = c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta_j - b_i)}}$$

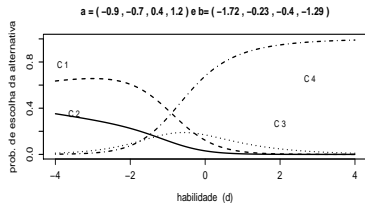
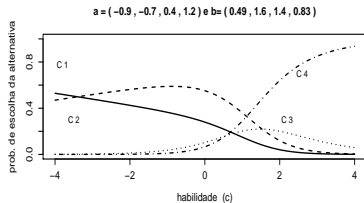
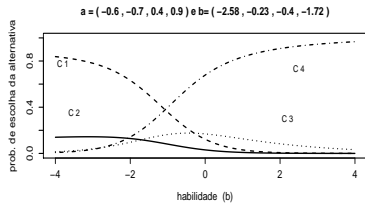
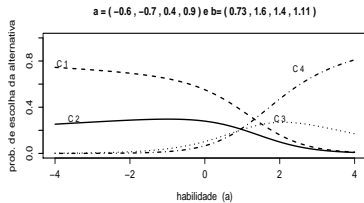
- $\theta_j$ : traço latente do indivíduo  $j$ . Suposição usual  $\theta_j \sim N(0, 1)$ .
- $\zeta_i = (a_i, b_i, c_i)'$ .
- $a_i$ : parâmetro de discriminação (escala) do item  $i$ .
- $b_i$ : parâmetro de dificuldade (posição) do item  $i$ .
- $c_i$ : probabilidade aproximada (assintótica) de indivíduos com traço latente baixo do item  $i$ .



- Os modelos dicotômicos consideram apenas a probabilidade de resposta correta e incorreta.
- Não levam em consideração as informações dos distratores (categorias de resposta incorreta)
- Modelar a probabilidade de escolhada para cada categoria  $s$ .
- **Modelo de Resposta Nominal - MRN.**

$$P_{ijs} = P(Y_{ijs} = 1 | \theta_j, \zeta_i) = \frac{e^{a_{is}(\theta_j - b_{is})}}{\sum_{h=1}^{m_i} e^{a_{ih}(\theta_j - b_{ih})}},$$

- $a_{is}$  : está associado à discriminação da categoria  $s$ .
- $b_{is}$  : está relacionado à dificuldade da categoria  $s$ .

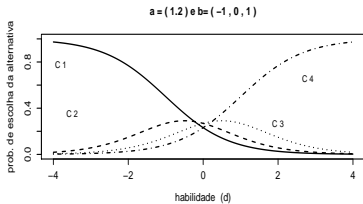
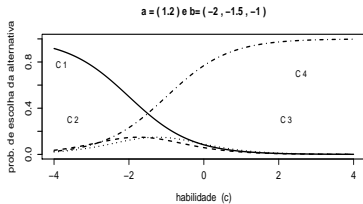
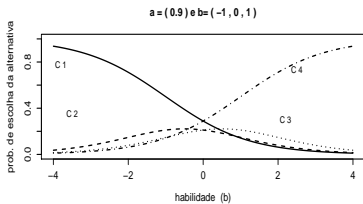
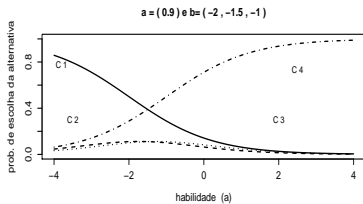


- Suponha agora categorias ordinais: por exemplo, itens dissertativos aos quais são atribuídos uma nota de 0,1,...,10.
- **Modelo de Resposta Gradual - MRG.**

$$P_{ijs} = P(Y_{ijs} = 1 | \theta_j, \zeta_i) = \frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta_j - b_{is})}} - \frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta_j - b_{i(s+1)})}}$$

- $a_i$  : está associado à discriminação do item  $i$ .
- $b_{is}$  : está relacionado à dificuldade da categoria  $s$ ., com

$$b_{is} \leq b_{i1} \leq b_{i2} \leq \dots \leq b_{im}$$



## ■ Modelo multidimensional compensatório de 2 parâmetros :

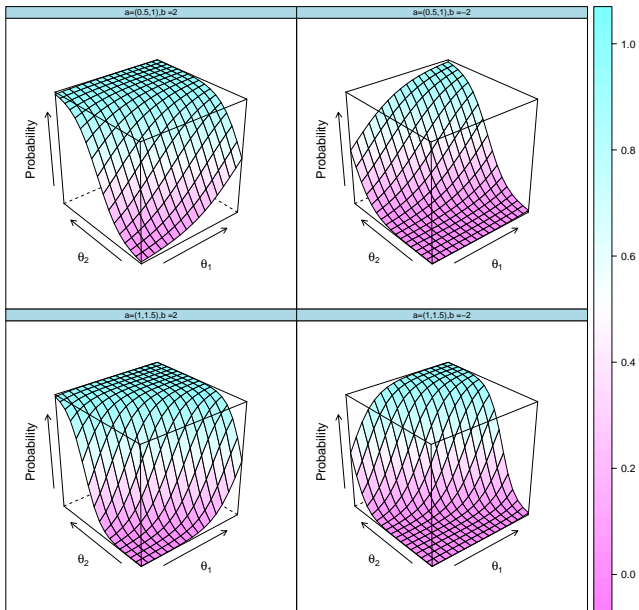
Seja  $Y_{ij}$  a resposta do indivíduo  $j$  ao item  $i$ .

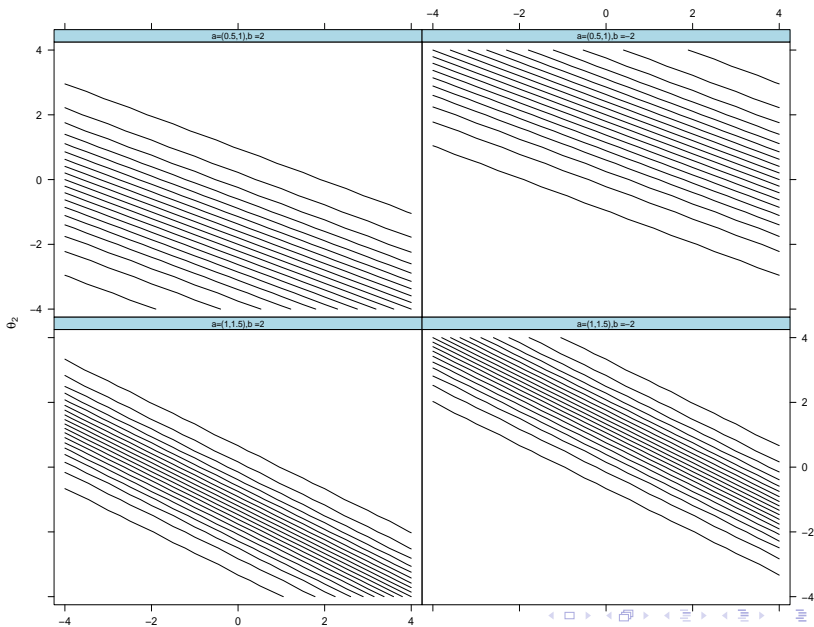
$$Y_{ij} | (\theta_j, \zeta_i) \sim \text{Bernoulli}(p_{ij}),$$

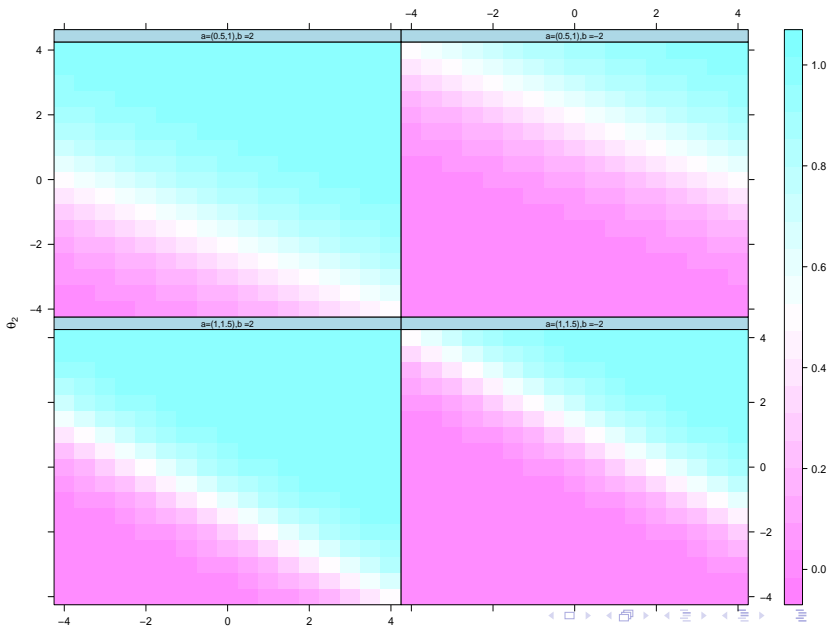
$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1 | \theta_j, \zeta_i) = \frac{1}{1 + e^{-(\mathbf{a}'_i \theta_j + d_i)}}$$

- $\theta_j = (\theta_{j1}, \dots, \theta_{jM})'$ .
- $\theta_{jm}$ : traço latente do indivíduo  $j$  relacionado à dimensão  $m$ .
- $\zeta_i = (\mathbf{a}_i, d_i)'$ .
- $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{iM})'$ , vetor de parâmetros relacionados à discriminação do item  $i$ .
- $d_i$ : parâmetro relacionado à dificuldade do item  $i$ .









# Algumas referências

- Andrade, D. F., Tavares, H. R. e Valle, R. C. (2000). Teoria da Resposta ao Item: conceitos e aplicações. 14º SINAPE, ABE, Caxambú, MG. [http : //www.inf.ufsc.br/ dandrade/TRI/](http://www.inf.ufsc.br/dandrade/TRI/).
- De Ayala, R. J. (2008). The Theory and Practice of Item Response Theory, Methodology in the Social Sciences, The Guilford Press, New York, NY.