Processos de Autoregressivos de Médias Móveis com variáveis exógenas (ARMAX)

Prof. Caio Azevedo

Processos ARMA

- Como vimo anteriormente (aqui), dizemos que, dizemos que $\{Y_t\}$ é um processo ARMA(p,q) se for estacionário e se puder ser representado por:

$$\phi(B)Y_t = \theta(B)\epsilon_t, \epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2),$$

  em que $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$ é o polinômio autoregressivo (AR), $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q$ é o polinômio de médias móveis (MA), e $\phi(B)$ e $\theta(B)$ não possuem fatores em comum.
- O processo $\{Y_t\}$ é dito ser ARMA(p,q) com média μ se $\{Y_t - \mu\}$ é ARMA(p,q).

Processos ARMA

- A forma, por extenso, do processo ARMA(p,q) (de média μ) é dada por:

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \mu + \phi_1 Y_{t-1} + ... + \phi_p Y_{t-p} \\
&+ \theta_1 \epsilon_{t-1} + ... + \theta_q \epsilon_{t-q} \\
&+ \epsilon_t .
\end{aligned}
$$

- Muitas vezes, mesmo o que o processo ARMA(p,q) seja apropriado para modelar uma dada ST, a utilização de outras ST's, como covariáveis, pode melhorar o ajuste, ou mesmo tornar o processo ARMA(p,q) bem ajustado, no caso em que ele não seja.

Processos ARMAX

- Um processo ARMAX(p,q,b) (Autoregressivemoving-average model with exogenous inputs), com uma única variável independente (exógena ou ainda covariável) é dado por:

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \mu + \phi_1 Y_{t-1} + ... + \phi_p Y_{t-p} \\
&+ \theta_1 \epsilon_{t-1} + ... + \theta_q \epsilon_{t-q} \\
&+ \beta_1 X_{t-1} + ... + \beta_b X_{t-b} \\
&+ \epsilon_t .
\end{aligned}
$$

Processos ARMAX

- Na prática, a variável endógena (X) tem uma natureza estocástica $(\{X_t\})$.
- No entanto, pode ser muito complicado, do ponto de vista inferencial, tratá-la como tal.

Processos ARMAX

- Uma forma de ajustar o modelo ARMAX(p,q,b) é utilizar a mesma abordagem vista para o modelo ARMA (aqui) (adicionalmente assumindo que $\epsilon_t \sim NID(0, \sigma^2)$), em que os parâmetros $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_b)'$ são adicionados ao processo de estimação.
- Previsões para valores observados e futuros podem ser feitas como descritas aqui, enquanto que a análise residual como descrita aqui (em ambos os casos, com a suposição adicional de que $\epsilon_t \sim NID(0, \sigma^2)$).

Processos ARMAX

- Há diversas variantes e extensões do modelo anterior.
- Uma delas consiste em considerar uma segunda variável exógena, ou seja:

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \mu + \phi_1 Y_{t-1} + ... + \phi_p Y_{t-p} \\
&+ \theta_1 \epsilon_{t-1} + ... + \theta_q \epsilon_{t-q} \\
&+ \beta_1 X_{t-1} + ... + \beta_b X_{t-b} \\
&+ \gamma_1 Z_{t-1} + ... + \gamma_c Z_{t-c} \\
&+ \epsilon_t .
\end{aligned}
$$

Processos ARMAX

- Em relação aos pacotes, também deve-se ter cuidado com as parametrizações adotadas.
- Maiores detalhes podem ser encontrados aqui, aqui, aqui e aqui.