

LISTA 4
MM 425 - VERÃO 2019

- (1) Resolva os seguintes exercícios do livro de Brezis: 5.15, 5.16, 5.17, 5.26, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.8, 6.17, 6.18, 6.19, 6.20 e 6.24.
- (2) Seja X um espaço vetorial com produto interno e seja A um conjunto ortonormal em X . Prove que A é completo se e somente se vale que

$$\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle, \forall x \in A \Rightarrow y = z.$$

- (3) Sejam H um espaço de Hilbert, $A = \{x_n \in H : n \in \mathbb{N}\}$ um conjunto ortonormal e $\{\alpha_n\}_n$ uma sequência em \mathbb{K} . Prove que
- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge se e somente se $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < +\infty$.
- (b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge a x então $\alpha_n = \langle x, x_n \rangle$.
- (4) (Processo de Gram-Schmidt) Seja $\{x_n\}_n$ uma sequência de vetores linearmente independentes em um espaço vetorial com produto interno. Defina indutivamente os vetores

$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}, \quad e_n = \frac{f_n}{\|f_n\|}, \quad \text{onde } f_n = x_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle x_n, e_j \rangle e_j, \quad \text{para } n \geq 2.$$

Prove que $\{e_n\}_n$ é um conjunto ortonormal e que este conjunto gera o mesmo espaço que $\{x_n\}_n$.

- (5) Aplique o Processo de Gram-Schmidt ao conjunto $\{1, x, x^2\} \subset L^2([-1, 1])$. Utilize sua resposta para calcular a distância de x^3 ao espaço $\langle \{1, x, x^2\} \rangle$, ou seja, encontre

$$\min_{a, b, c \in \mathbb{C}} \int_{-1}^1 |x^3 - (a + bx + cx^2)|^2 dx.$$

- (6) Seja K um subconjunto não-vazio, fechado e convexo de um espaço de Hilbert H real. Prove que a projeção P_K não aumenta distâncias, ou seja,

$$\|P_K f - P_K g\| \leq \|f - g\|, \quad \forall f, g \in H.$$

No caso em que H é um espaço de Hilbert complexo temos que o mesmo resultado é válido com a hipótese adicional de que K é um subespaço vetorial.

- (7) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto mensurável e $M = \{f \in L^2(\mathbb{R}^N) : f(x) = 0 \text{ para quase todo } x \in \Omega^c\}$. Prove que a projeção de $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ em M é dada por $P_M f = \chi_\Omega f$.
- (8) Seja H um espaço de Hilbert de dimensão infinita. Então H é separável se e somente se possui um sistema ortonormal completo enumerável.
- (9) Prove que toda projeção ortogonal sobre subespaços fechados de um espaço de Hilbert é um operador autoadjunto.
- (10) Seja $T : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ um operador definido por

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)dt, \forall x \in [0, 1].$$

Prove que T é um operador linear contínuo e que o adjunto $T^* : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ de T é dado por

$$T^*g(x) = \int_x^1 g(t)dt, \forall x \in [0, 1].$$

- (11) Seja $T : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ um operador definido por

$$Tf(t) = \int_0^1 K(t, s)f(s)ds,$$

onde o núcleo $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ pertence a $L^2([0, 1] \times [0, 1])$. Prove que T é compacto.

- (12) Sejam X e Y espaços de Banach. Prove que se $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ então $x_n \rightarrow x$ implica $Tx_n \rightarrow Tx$. Além disso, prove que se X for reflexivo então a recíproca é verdadeira.
- (13) Sejam H um espaço de Hilbert separável e $T \in \mathcal{B}(H)$. Então T é compacto se e somente se T^* é compacto.
- (14) Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$. Prove que $R(T)$ e $N(T)^\perp$ são subespaços separáveis de H_2 e H_1 , respectivamente.
- (15) Seja H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{K}(H)$ um operador autoadjunto. Prove que $\|T\|$ ou $-\|T\|$ é autovalor de T .
- (16) Dada uma sequência $\{\alpha_n\}_n$ tal que $\alpha_n \rightarrow 0$, prove que existe um operador linear compacto T tal que $\sigma(T) = \{\alpha_n\}_n \cup \{0\}$. Sob quais condições este operador é autoadjunto?
- (17) Sejam H um espaço de Hilbert, $K \in \mathcal{K}(H)$ e $\{T_n\}_n \subset \mathcal{B}(H)$ tal que para cada $x \in H$ temos $T_n(x) \rightarrow T(x)$, onde $T \in \mathcal{B}(H)$. Prove que $T_n K \rightarrow TK$ fortemente.

(18) Seja $S_r : l_2 \rightarrow l_2$ o operador translação à direita (*right shift*) definido como $S_r(x) = (0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ para cada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l_2$.

(a) Prove que se $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $|\lambda| \leq 1$ então $S_r - \lambda I$ não é sobrejetor e conclua que

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\} \subset \sigma(S_r).$$

(b) Prove que $\|S_r\| = 1$ e conclua que

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\} = \sigma(S_r).$$

(c) S_r é autoadjunto? E compacto?

(19) Seja $X = \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ o espaço das funções contínuas $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$. Calcule os autovalores e autovetores da aplicação $T : X \rightarrow X$ dada por

$$(Tf)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t+x)f(t)dt.$$

(20) Seja $T : L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$ dado por $T(f)(t) = tf(t)$. Prove que $\sigma_p(T) = \emptyset = \sigma_r(T)$.