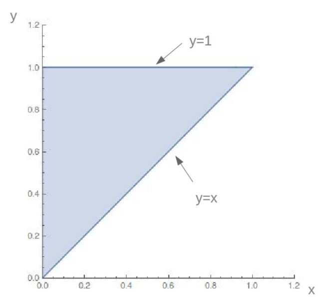
Gabarito 2º Prova - MA211

1. (2,0) Resolva a integral dupla
$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx.$$
Desenhe a região de integração.

Solução: Começaremos fazendo o esboço da região de integração,



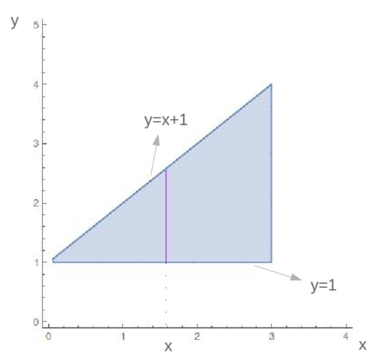
Como a função $\sin(y^2)$ não possui primitiva elementar então para calcular a integral precisamos mudar a ordem de integração. Para isso, observe que a região de integração pode ser escrita na forma $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$. Como a função que estamos integrando é contínua na região de integração podemos usar o Teorema de Fubini e obter
$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx = \int_0^1 \int_0^y \sin(y^2) dx dy.$$
Por fim, integrando primeiro em x e depois fazendo a substituição $u = y^2$ obtemos o seguinte
$$\int_0^1 \int_0^y \sin(y^2) dx dy = \int_0^1 \sin(y^2) x|_0^y dy = \int_0^1 \sin(y^2) y dy = \int_0^1 \frac{1}{2} \sin(u) du = -\frac{1}{2} \cos(u)|_0^1 = -\frac{\cos(1) - 1}{2}.$$
Portanto,
$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx = \frac{1 - \cos(1)}{2}.$$

2. (2,0) Calcule a massa e o centro do massa da lâmina que ocupa a região triangular no plano delimitada pelas retas $y = 1$, $x = 3$ e $y = x + 1$ com densidade $\rho(x, y) = x$.

   Lembre que a massa m e o centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$ de uma lâmina que ocupa uma região D no plano são dados por

$$m = \iint_D \rho(x,y)dA, \bar{x} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)dA, \bar{y} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)dA$$

   Solução: Esboço da região



   Observe que a região pode ser escrita como $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq x + 1\}$

   Primeiro vamos calcular a massa m:

$$m = \iint_D xdA = \int_0^3 \int_1^{x+1} xdydx = \int_0^3 xy|_1^{x+1} dydx = \int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\,|_0^3 = 9$$

   Agora vamos calcular o centro de massa:

$$\bar{x} = \frac{1}{9}\iint_D x^2 dA = \frac{1}{9}\int_0^3 \int_1^{x+1} x^2 dydx = \frac{1}{9}\int_0^3 x^2 y|_1^{x+1} dydx = \frac{1}{9}\int_0^3 x^3 dx = \frac{1}{9}\frac{x^4}{4}\,|_0^3 = \frac{9}{4},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{9}\iint_D xydA = \frac{1}{9}\int_0^3 \int_1^{x+1} xydydx = \frac{1}{9}\int_0^3 x\frac{y^2}{2}\,|_1^{x+1}\, dydx = \frac{1}{9}\int_0^3 \frac{x^3 + 2x^2}{2} dydx$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{3}\right)|_0^3 = \frac{17}{8}.$$

   Portanto, a massa da lâmina é 9 e o centro de massa $(9/4, 17/8)$.

3. (2,0) Considere a integral dupla em coordenadas polares

$$I = \int_0^{\pi} \int_0^{\sin(\theta)} r dr d\theta.$$

(a) (0,8) Esboce a região de integração no plano cartesiano.

Sugestão: Analise a imagem das retas $\theta = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$.

(b) (1,2) Calcule e interprete geometricamente a integral I.

Solução:

(a) A transformação de coordenadas polares para cartesianas é dada por:

$$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta).$$

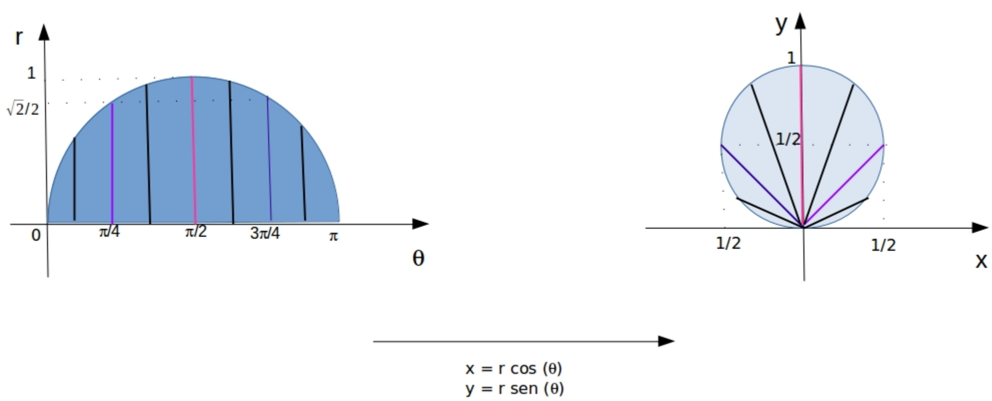
Observe que a região de integração em coordenadas polares é

$$R = \{(r, \theta) : 0 \le \theta \le \pi, 0 \le r \le \sin(\theta)\}.$$

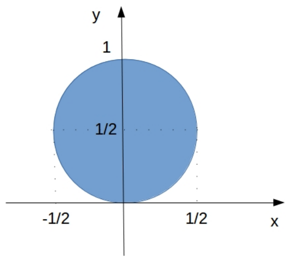
Para descobrirmos a imagem desta região em coordenadas cartesianas vamos analisar o ocorre para certos valores constantes de θ (veja na figura abaixo):

- $\theta = 0$: Neste caso $r = 0$, que em coordenadas cartesianas é $(0, 0)$.
- $\theta = \pi/4$: Neste caso teremos $0 \le r \le \sqrt{2}/2$, que em coordenadas cartesianas é a reta que liga a origem ao ponto $(1/2, 1/2)$.
- $\theta = \pi/2$: Neste caso $0 \le r \le 1$, que em coordenadas cartesianas é a reta que liga a origem ao ponto $(0, 1)$.
- $\theta = 3\pi/4$: Neste caso $0 \le r \le \sqrt{2}/2$, que em coordenadas cartesianas é a reta que liga a origem ao ponto $(-1/2, 1/2)$
- $\theta = \pi$: Neste caso $r = 0$, que em coordenadas cartesianas é $(0, 0)$.

(Outra forma de encontrar a região seria observar que como $r^2 = x^2 + y^2$ e $r\sin(\theta) = y$ então a equação $r = \sin(\theta)$, que é equivalente a $r^2 = r\sin(\theta)$, pode ser escrita em coordenadas cartesianas como $x^2 + y^2 = y$, ou seja, $x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4$.)



Logo, temos o seguite esboço da região:



(b) Vamos calcular I:

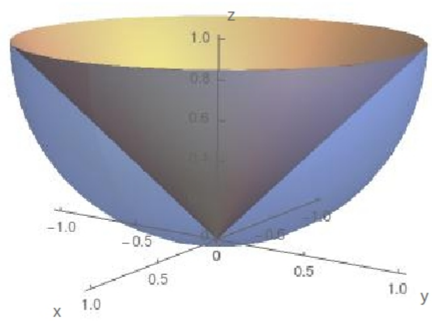
$$I = \int_0^{\pi} \int_0^{\sin(\theta)} r dr d\theta = \int_0^{\pi} \frac{r^2}{2} \Big|_0^{\sin(\theta)} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^2(\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{4} \left(\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) |_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}$$

Geometricamente, temos que I em coordenadas cartesianas representa a área da região D, que é o disco de raio $1/2$ e centro $(0, 1/2)$. Como a área de tal região é $\pi/4$ o valor encontrado para I está de acordo com a interpretação geométrica.

4. (2,0) Calcule o volume da região delimitada por cima pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e por baixo pela esfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ utilizando coordenadas esféricas.

Solução: Primeiro vamos fazer um esboço da região.



Em amarelo temos o cone e em azul a esfera.

Chamemos de E a região descrita no problema. Então, o volume de E é dado pela integral $\iiint_E dV$. Para calcular esta integral vamos fazer a mudança de variáveis para coordenadas esféricas, ou seja,

$$x = \rho\cos(\theta)\sin(\phi), y = \rho\sin(\theta)\sin(\phi), z = \rho\cos(\phi), \rho \geq 0, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Portanto, para encontrar a equação da esfera em coordenadas esféricas basta substituir os valores acima na equação cartesiana da esfera,

$$(\rho\cos(\theta)\sin(\phi))^2 + (\rho\sin(\theta)\sin(\phi))^2 + (\rho\cos(\phi) - 1)^2 = 1.$$

Simplificando a expressão acima chegamos a: $\rho = 2\cos(\phi)$. Observe que como $\rho \geq 0$ devemos ter $0 \leq \phi \leq \pi/2$, o que também pode ser verificado geometricamente. Logo, a equação da esfera em coordenadas esféricas é

$$\rho = 2\cos(\phi), 0 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Fazendo a mesma substituição na equação do cone obtemos,

$$\rho\cos(\phi) = \sqrt{(\rho\cos(\theta)\sin(\phi))^2 + (\rho\sin(\theta)\sin(\phi))^2}.$$

Simplificando a expressão acima e usando que $\rho \geq 0$ e $\sin(\phi) \geq 0$, para $0 \leq \phi \leq \pi$, obtemos que $\rho\cos(\phi) = \rho\sin(\phi)$, donde segue $\phi = \pi/4$. Logo a equação do cone em coordenadas esféricas é

$$\phi = \pi/4, \rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Logo, a região E pode ser escrita da seguinte forma:

$$E = \{(\rho\cos(\theta)\sin(\phi), \rho\sin(\theta)\sin(\phi), \rho\cos(\phi)) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, \pi/4 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq \rho \leq 2\cos(\phi)\}.$$

Portanto,

$$\iiint_E dV = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{2\cos(\phi)} \rho^2\sin(\phi)d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{2\cos(\phi)} \sin(\phi)d\phi d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(\phi)^3\sin(\phi)d\phi d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos(\phi)^3\sin(\phi)d\phi$$

$$= \frac{16\pi}{3}\int_{\sqrt{2}/2}^{0}(-u^3)du = \frac{16\pi}{3}\frac{(-u^4)}{4}\Big|_{\sqrt{2}/2}^{0} = \frac{\pi}{3},$$

observe que acima fizemos a mudança de variáveis $u = \cos(\theta)$, $du = -\sin(\theta)d\theta$.

Logo, o volume do sólido descrito no problema é $\pi/3$.

5. (2,0)Seja Q a região limitada pelo quadrilátero com vértices $(0,0),(1,2),(3,-1)$ e $(4,1)$.

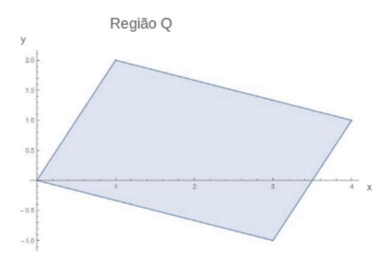
   (a) (0,5)Esboce a região Q no plano xy.

   (b) (1,0)Considere a transformação $u(x,y) = 2x - y$ e $v(x,y) = x + 3y$. Esboce a imagem da região Q através desta transformação no plano uv.

   (c) (0,5)Calcule
$$\iint_Q (x+3y)e^{(2x-y)(x+3y)}dA$$

Solução:

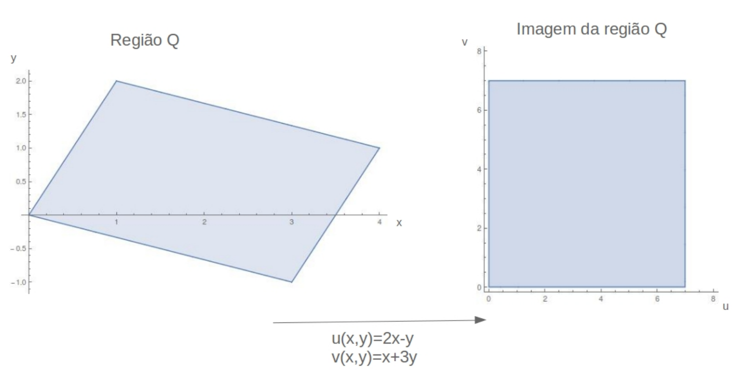
(a) Esboço da região Q



(b) Primeiro observe que a região Q é limitada pelas retas
$$y = 2x, y = \frac{-x+7}{3}, y = 2x - 7, y = -\frac{x}{3}.$$
Para encontrar a imagem de Q pela transformação $u(x,y) = 2x - y$ e $v(x,y) = x + 3y$ vamos escrever x e y em termos de u e v e usar as equações que descrevem a fronteira de Q para encontrar a fronteira da imagem de Q. Temos que
$$x = \frac{3u+v}{7}, y = \frac{2v-u}{7}.$$
Portanto, a imagem das fronteiras de Q pela transformação será

- imagem de $y = 2x$ é $u = 0$;
- imagem de $y = \frac{-x+7}{3}$ é $v = 7$;
- imagem de $y = 2x - 7$ é $u = 7$;
- imagem de $y = -\frac{x}{3}$ é $v = 0$.

Com as informações obtidas acima podemos fazer o seguinte esboço:



(c) Fazendo a mudança de variáveis $u(x,y) = 2x - y$ e $v(x,y) = x + 3y$ temos que

$$\iint_Q (x+3y)e^{(2x-y)(x+3y)}dA = \int_0^7 \int_0^7 ve^{uv} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv,$$

onde

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Escrevendo x e y como funções de u e v obtemos que

$$x = \frac{3u+v}{7}, y = \frac{2v-u}{7}.$$

Portanto,

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \det \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} = 1/7.$$

Logo,

$$\iint_Q (x+3y)e^{(2x-y)(x+3y)}dA = \int_0^7 \int_0^7 ve^{uv}\frac{1}{7}dudv = \frac{1}{7}\int_0^7 e^{uv}\,\big|_0^7\, dv = \frac{1}{7}\int_0^7 (e^{7v}-1)dv$$

$$= \frac{1}{7}\left(\frac{e^{7v}}{7} - v\right)\big|_0^7 = \frac{e^{49}-50}{49},$$

ou seja,

$$\iint_Q (x+3y)e^{(2x-y)(x+3y)}dA = \frac{e^{49}-50}{49}.$$