LISTA 3
MM 425 - 1º SEMESTRE 2015

Exercícios que devem ser entregues até o dia 25 de Maio: 3 **e os seguintes exercícios do livro do Brezis:** 3.9 (*item* 2)**,** 3.10**,** 3.18 (*item* 2)**,**3.22**,** 4.15(*item* 2)**,** 4.19**.**

(1) Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Prove que o fecho sequencial fraco de um conjunto $A \subset X$ está sempre contido no fecho de A na topologia fraca. Por outro lado, exiba um exemplo de um conjunto que é fracamente sequencialmente fechado mas não é fechado na topologia fraca. (Dica: Considere uma sequência $(X_k)_k$ de subespaços de X tal que $\dim X_k = k$. Prove que é possível construir um conjunto $S = \cup_{k=1}^{\infty} S_k$ onde cada S_k possui um número finito de elementos e satisfaz a seguinte propriedade: dado $x \in X_k$ com $\|x\| = k$ existe $y \in S_k$ tal que $\|x - y\| < 1/k$ e $\|y\| = k$. Prove que S é fracamente sequencialmente fechado e que 0 pertence ao fecho de S na topologia fraca. Conclua o resultado.)

(2) Seja $\varphi : [1, 2] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere a sequência $\{x_n\}_n \subset c_0$ definida por

$$x_n := (0, ..., 0, \varphi(n/n), \varphi((n + 1)/n), \ldots, \varphi((n + n)/n), 0, \ldots),$$

onde $\varphi(n/n)$ está na n–ésima posição. Prove que $x_n \rightharpoonup 0$ e que $(x_n)_n$ converge na topologia forte (ou seja, na norma $\| \cdot \|_\infty$) se, e somente se, $\varphi \equiv 0$.

(3) Dê um exemplo de um espaço de Banach X e de uma sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em X^* tais que $\|f_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 na topologia fraca estrela e toda combinação linear convexa dos $f_n's$ tem norma igual a 1.

(4) Seja X um espaço de Banach. Suponnha que toda sequência limitada $\{x_n\} \subset X$ possui uma subsequência convergente na topologia fraca. Mostre que X é reflexivo.

(5) Seja X um espaço normado. Demonstre que as seguintes afirmações são equivalentes:
   a) o espaço X é uniformemente convexo;
   b) se (x_n) e $(y_n)_n$ são sequências tais que $\|x_n\| = \|y_n\|$ para todo n e com $\|(x_n + y_n)/2\| \to 1$, então $\|x_n - y_n\| \to 0$;

c) se (x_n) e (y_n) são sequências em B_X tais que $\|(x_n + y_n)/2\| \to 1$, então $\|x_n - y_n\| \to 0$;

d) se (x_n) e (y_n) são sequências em X tais que $\|x_n\|, \|y_n\|$ e $\|(x_n + y_n)/2\|$ convergem a 1, então $\|x_n - y_n\| \to 0$.

Sugestão: b) implica em d) e d) implica em c; disso segue que b), c) e d) são equivalentes; a) implica em b); b) implica em a).

(6) Resolva os seguintes exercícios do livro do Brezis: $3.8, 3.9, 3.10, 3.13, 3.15, 3.16, 3.17, 3.18, 3.20, 3.22, 3.25, 3.29, 4.5, 4.7, 4.12, 4.13, 4.15, 4.16, 4.17, 4.19, 4.21$.