LISTA 2
MM 425 - 1º SEMESTRE 2015

Exercícios que devem ser entregues até o dia 22 de Abril: $1, 2, 5, 7$ **e os seguintes exercícios do livro do Brezis:** $2.22, 3.6, 3.9$ (*item* 2) **e** 3.10**.**

(1) Sejam X e Y espaços de Banach e sejam $A \in \mathcal{B}(X)$ e $G \in \mathcal{B}(\mathcal{C}([a,b],X),Y)$, onde $\mathcal{C}([a,b],X)$ está munido da seguinte norma: $\|f\|_{\mathcal{C}} = \max_{t\in[a,b]} \|f(t)\|_X$. Considere uma função $f \in \mathcal{C}([a,b],X)$ e um elemento $y \in Y$. Dizemos que uma função $u_{(f,y)} : [a,b] \to X$ uma é solução do seguinte sistema

$$\begin{cases} u'(t) + A(u(t)) = f(t) \\ G(u) = y. \end{cases}$$

se $u_{(f,y)} \in \mathcal{C}^1([a,b],X)$, se $u_{(f,y)}$ satisfaz a primeira equação para todo $t \in [a,b]$ e se $G(u_{(f,y)}) = y$. Prove que se para cada $(f,y) \in \mathcal{C}([a,b],X) \times Y$ o sistema possuir uma única solução $u_{(f,y)}$ então a aplicação definida abaixo é contínua

$$T : \mathcal{C}([a,b],X) \times Y \to \mathcal{C}^1([a,b],X) \quad (1)$$

$$(f,y) \to u_{(f,y)} \quad (2)$$

onde $\mathcal{C}([a,b],X)\times Y$ está munido da norma do produto $\|\cdot\|_{\mathcal{C}\times Y} = \|\cdot\|_{\mathcal{C}} + \|\cdot\|_Y$ e $\mathcal{C}^1([a,b],X)$ está munido da seguinte norma: $\|f\|_{\mathcal{C}^1} = \max\{\|f\|_{\mathcal{C}}, \|f'\|_{\mathcal{C}}\}$.

(2) Prove que se M é subspaço vetorial fechado de $\mathcal{C}([0,1])$ formado apenas por funções continuamente diferenciáveis então M tem dimensão finita. (Dica: Considere a aplicação identidade $I : (M, \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}) \to (M, \|\cdot\|_{\mathcal{C}})$ e com o auxílio do Teorema da Aplicação Inversa e do Teorema de Arzelá-Ascoli prove que a imagem da bola unitária fechada é compacta.)

(3) Sejam X e Y espaços de Banach e $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de operadores lineares e contínuos de X em Y. Suponha que

(i) Existe $c > 0$ tal que $\|T_n\| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Existe um subconjunto denso D de X tal que $\{T_n z\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge em Y para cada $z \in D$.

Prove que $\{T_n x\}$ converge em Y para cada $x \in X$.

(4) Sejam X e Y espaços de Banach e $A : D(A) \subset X \to Y$ um operador linear densamente definido e fechado. Prove que

(i) $N(A) = R(A^*)^\perp$,
(ii) $N(A^*) = R(A)^\perp$,
(iii) $N(A)^\perp \supset \overline{R(A^*)}$,
(iv) $N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}$,

(5) Sejam X e Y espaços de Banach e $A : D(A) \subset X \to Y$ um operador linear densamente definido e fechado. Prove que as propriedades a seguir são equivalentes
(i) $R(A)$ é fechado em Y,
(ii) $R(A^*)$ é fechado em X^*,
(iii) $R(A) = N(A^*)^\perp$,
(iv) $R(A^*) = N(A)^\perp$.

(6) Sejam X e Y espaços de Banach e $A : D(A) \subset X \to Y$ um operador linear densamente definido e fechado. Prove que as propriedades a seguir são equivalentes
(i) $D(A) = X$,
(ii) A é limitado,,
(iii) $D(A^*) = Y^*$,
(iv) A^* é limitado.
Verifique ainda que nestas condições: $\|A\|_{\mathcal{B}(X,Y)} = \|A^*\|_{\mathcal{B}(Y^*,X^*)}$.

(7) Dê um exemplo de um espaço de Banach X e de uma sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em X^* tais que $\|f_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 na topologia fraca estrela e toda combinação linear convexa dos $f_n's$ tem norma igual a 1.

(8) Demonstre que a aplicação identidade de $(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_{L^1})$ para $(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_{\mathcal{C}})$ tem gráfico fechado mas não é contínua. Explique porque isso não contradiz o Teorema do Gráfico Fechado.

(9) Resolva os seguintes exercícios do livro do Brezis: $2.3, 2.8, 2.9, 2.14, 2.16, 2.17, 2.22, 2.23, 2.24, 2.25, 2.27, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10$.