MS650A - 2S04 - Lista 6

(1) Exercícios do livro do Edmundo, capítulo 8, do PP 8.1 até o PP 8.40.

(2) Encontre a forma geral da solução da equação

$$u_x + u_y = u.$$

Seja a curva $C : (x, y, u) = (t, t, 1)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$. Discuta se existem ou não soluções dessa equação passando por essa curva.

(3) Encontre a forma geral da soluções dos seguintes problemas:

(a) $\begin{cases} u_t + cu_x = 0, \\ u(vt, t) = \sin t. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u_y + uu_x = 0, \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2u_x - u_y = 0, \\ u(x, 0) = \sin x. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2u_x - 3u_y = 4, \\ u(x, 0) = x^2. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} xu_x + yu_y = x, \\ u(x, x^2) = \mathrm{e}^{-x}. \end{cases}$

(f) $\begin{cases} u_t + u_x = u, \\ u(0, y) = 1/(1 + y^2). \end{cases}$

(g) $\begin{cases} (y + u)u_x + (u + x)u_y = x - y, \\ u(x, 0) = 1 + x. \end{cases}$

(h) $\begin{cases} u_x + u_y = u^2, \\ u(x, 0) = h(x). \end{cases}$

(i) $\begin{cases} u_x + uu_y = 1, \\ u(0, y) = y. \end{cases}$

(j) $\begin{cases} u_{xy} + u_x = 0, \\ u(x, 0) = \cos x, \\ u(0, y) = y + \mathrm{e}^{-y}, \\ \text{Sugestão: } u_x = w \end{cases}$

(4) Seja a equação de Laplace n-dimensional

$$\nabla^2 u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0.$$

Mostre que se $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ é uma solução dessa equação, então a chamada transformação de Kelvin ou inversão,

$$v = \frac{1}{R^{n-2}} u\left(\frac{x_1}{R^2}, \ldots, \frac{x_n}{R^2}\right), \qquad R^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2,$$

fornece uma outra solução $v = v(x_1, \ldots, x_n)$.