MS650A - 2S04 - Lista 4

(1) Exercícios do livro do Edmundo, capítulo 6, do PP 6.1 até o PP 6.19.

(2) Calcule as seguintes transformadas de Laplace:

$$\mathcal{L}[\sinh at] = \frac{a}{a^2 - s^2}, \qquad \mathcal{L}[\cosh at] = \frac{s}{a^2 - s^2},$$

$$\mathcal{L}[t \sin at] = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}, \qquad \mathcal{L}[J_0(at)] = \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}},$$

$$\mathcal{L}[tJ_1(t)] = \frac{1}{(s^2 + 1)^{3/2}}, \qquad \mathcal{L}[\sin \sqrt{t}] = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} \mathrm{e}^{-1/4s},$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \mathrm{e}^{-1/4s}, \qquad \mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{\sin u}{u}\, du\right] = \frac{1}{s} \arctan \frac{1}{s}.$$

(3) Se $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, mostre que

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s).$$

(4) Usando as propriedades de linearidade, translação e de mudança de escala, identifique as funções $F(s)$ abaixo com uma transformada de Laplace conhecida e com isso calcule as seguintes transformadas inversas de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2s + 3}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-3t/2}, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s + 7}{s^2 - 2s - 3}\right] = 4\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-t},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-5s}}{(s - 2)^4}\right] = \frac{1}{6}(t - 5)^3 \mathrm{e}^{2(t-5)} H(t - 5), \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-a/s}}{s^{1/2}}\right] = \frac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + 1}{s^2 + s + 1}\right] = \frac{\mathrm{e}^{-t/2}}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} + \sin \frac{\sqrt{3}t}{2}\right).$$

(5) Use o teorema da convolução para calcular as seguintes transformadas inversas de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}\right] = \frac{t \sin at}{2a}, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s + 1)^2}\right] = (t + 2)\mathrm{e}^{-t} + t - 2.$$

(6) Use a decomposição em frações parciais para calcular as seguintes transformadas inversas de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s^2 - 4}{(s + 1)(s - 2)(s - 3)}\right] = -\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-t} - \frac{4}{3}\mathrm{e}^{2t} + \frac{7}{2}\mathrm{e}^{3t},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s + 1}{(s + 1)(s^2 + 1)}\right] = 2\mathrm{e}^{t} - 2\cos t + \sin t.$$