MS650A - 2S04 - Lista 3

(1) Exercícios do livro do Edmundo, capítulo 6, do PP 6.31 até o PP 6.40.

(2) Usando a transformada de Fourier, mostre que a solução da equação

$$\kappa^2 \frac{d^4 y}{dx^4} + y = \delta(x), \qquad -\infty < x < \infty,$$

satisfazendo as condições $\lim_{x\to\pm\infty} y^{(k)}(x) = 0$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ é dada por

$$y(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\kappa}} \left(\cos \frac{|x|}{\sqrt{2\kappa}} + \sin \frac{|x|}{\sqrt{2\kappa}} \right) \mathrm{e}^{-|x|/\sqrt{2\kappa}}.$$

(3) Usando a transformada em seno de Fourier, mostre que a solução da equação do calor,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t > 0, \quad 0 < x < \infty,$$

com as condições que $u(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ se anulem para $x \to 0$ e $x \to \infty$ e a condição inicial

$$u(x, 0) = f(x)$$

é dada por

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty f(\xi) \mathrm{e}^{-Dk^2 t} \sin k\xi \sin kx \, d\xi dk.$$

(4) Usando a transformada de Fourier, mostre que a solução da equação

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\kappa \frac{\partial w}{\partial x} + D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad t > 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

satisfazendo as condições que $w(x,t)$, $\frac{\partial w}{\partial x}(x,t)$ e $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t)$ se anulem para $x \to \pm\infty$ e a condição inicial

$$w(x, 0) = \delta(x - x_0)$$

é dada por

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \exp\left(-\frac{(x - x_0 - \kappa t)^2}{4Dt} \right).$$

(5) Ilustre o Princípio de Incerteza de Heisenberg para a função

$$f(x) = \frac{a}{x^2 + a^2} \qquad (a > 0)$$

mostrando que nesse caso $\Delta x = a$ e $\Delta k = 1/\sqrt{2}a$.