MS650A - 2S04 - Lista 2

(1) Exercícios do livro do Edmundo, capítulo 6, do PP 6.20 até o PP 6.30.

(2) Mostre que

$$\mathcal{F}[\sin \alpha x] = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\delta(k-\alpha) - \delta(k+\alpha)\right),$$
$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x}\right] = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{sgn}(x) = i\sqrt{2\pi}\left(H(k) - 1/2\right),$$
$$\mathcal{F}[H(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\pi\delta(k) + \frac{i}{k}\right),$$

onde $\mathrm{sgn}(x) = 2H(x) - 1$ é a função sinal (ou seja, $\mathrm{sgn}(x) = 1$ se $x > 0$ e $\mathrm{sgn}(x) = -1$ se $x < 0$), $H(x)$ é a função escada e usamos a definição da transformada de Fourier como $\mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{ikx}\,dx$.

(3) Usando $\delta(x) = H'(x)$ e a expressão acima para $\mathcal{F}[H(x)]$, calcule $\mathcal{F}[\delta(x)]$.

(4) Use o teorema da integral de Fourier para mostrar que

$$\int_0^\infty \frac{y\sin xy}{1+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(x)\mathrm{e}^{-|x|},$$
$$\int_0^\infty \frac{\cos xy}{1+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-|x|}.$$

(5) Com $\mathcal{F}_S$ e $\mathcal{F}_C$ denotando, respectivamente, as transformadas em seno e co-seno de Fourier, mostre que

$$\mathcal{F}_S[\mathrm{e}^{-x}\cos x] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{k^3}{k^4+4},$$
$$\mathcal{F}_S[(H(x) - H(x-\pi))\sin x] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin k\pi}{1-k^2},$$
$$\mathcal{F}_S[x\mathrm{e}^{-ax}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a^2-k^2}{(a^2+k^2)^2},$$
$$\mathcal{F}_C[\mathrm{e}^{-\alpha x^2}] = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\,\mathrm{e}^{-k^2/4\alpha}.$$

(6) Seja $\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$. Usando a relação entre $\mathcal{F}_C[f'(x)]$ e $\mathcal{F}_S[f(x)]$ (obtida no PP 6.24) mais o resultado acima para $\mathcal{F}_C[\mathrm{e}^{-\alpha x^2}]$, mostre que

$$\mathcal{F}_S[\mathrm{erfc}(\lambda x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1 - \mathrm{e}^{-k^2/4\lambda^2}}{k}.$$