Métodos III - 1S 2012 - Lista 1

(1) Mostre que as sequências abaixo são sequências delta:

$$\text{(a)}\ \delta_n(x) = \frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2},$$
$$\text{(b)}\ \delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-n^2x^2}.$$

(2) Estabeleça o seguinte limite (no sentido distribucional):

$$\lim_{t\to 0^\pm} \ln(\tau + it) = \ln|\tau| \pm i\pi H(-\tau),$$

onde estamos tomando o ramo principal do logaritmo, ou seja, $|\arg(\tau + it)| < \pi$ e $H(\tau)$ é a distribuição de Heaviside. Relacione essa expressão com a fórmula de Plemelj-Sochozki.

(3) Mostre que, para $t \to \infty$,

$$\text{(a)}\ \frac{\mathrm{e}^{ixt}}{x - i0} \to 2\pi i\delta(x), \quad \text{(b)}\ \frac{\mathrm{e}^{-ixt}}{x - i0} \to 0,$$
$$\text{(c)}\ \frac{\mathrm{e}^{ixt}}{x + i0} \to 0, \quad \text{(d)}\ \frac{\mathrm{e}^{-ixt}}{x + i0} \to -2\pi i\delta(x).$$

Sugestão: use um dos lemas usados na demonstração do teorema de Fourier no curso de Métodos II.

(4) Mostre, para a constante, $a > 0$, e

$$f(x) = \mathrm{Pf}\,\frac{H(x)}{x},$$

que **não** é correto escrever

$$f(ax) = \mathrm{Pf}\,\frac{H(ax)}{ax}.$$

(5) Sejam y e τ números reais com $\tau > 0$ e $y \neq 0$. Mostre que

$$\delta(\mathrm{e}^{yt} - \tau) = \frac{1}{|y|\tau}\delta(t - y^{-1}\ln\tau).$$

(6) Mostre que

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|},$$

onde x_i são os zeros de $f(x)$ no intervalo onde essa função está definida.

(7) Calcule

$$\text{(a)}\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - 5x + 6)(3x^2 - 7x + 2)\,dx,$$
$$\text{(b)}\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - \pi^2)\cos x\,dx.$$

(8) Para $f(x) \in \mathcal{C}^\infty$, mostre que

$$f(x)\delta'(x) = -f'(0)\delta(x) + f(0)\delta'(x).$$

(9) Mostre que

$$\text{(a)}\ (\sin ax)\delta'(x) = -a\delta(x),$$
$$\text{(b)}\ [H(x)\sin ax]'' = a\delta(x) - a^2H(x)\sin ax,$$
$$\text{(c)}\ \mathrm{e}^{\alpha x}\delta^{(\nu)}(x-a) = \mathrm{e}^{\alpha a}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}(-\alpha)^{\nu-k}\delta^{(k)}(x-a),$$
$$\text{(d)}\ x^n\delta^{(m)}(x) = \begin{cases} 0, & m < n, \\ (-1)^n n!\delta(x), & m = n, \\ (-1)^n \frac{m!}{(m-n)!}\delta^{(m-n)}(x), & m > n. \end{cases}$$

(10) Mostre que

$$\text{(a)}\ \delta^{(k)}(ax + b) = \frac{1}{a^k|a|}\delta^{(k)}(x + b/a),$$
$$\text{(b)}\ \delta'(x^3 + 3x) = \frac{1}{9}\delta'(x).$$

(11) Mostre que

$$y(x) = c_1 + c_2H(x) + \ln|x|,$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, satisfaz a equação

$$xy' = 1.$$

Interprete esse resultado – ou seja, a presença de duas constantes arbitrárias na solução de uma EDO de primeira ordem.

(12) Mostre que

$$E(x,t) = \frac{H(t)}{2\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-|x|^2/4t}$$

satisfaz a equação

$$E_t - E_{xx} = \delta(x)\delta(t).$$

(13) Mostre que

$$(f(x)H(x)) * (g(x)H(x)) \\ = H(x)\int_0^x f(\xi)g(x-\xi)\,d\xi.$$

(14) Mostre que

$$\text{(a)}\ \ (xH(x)) * (\mathrm{e}^x H(x)) = (\mathrm{e}^x - x - 1)H(x),$$

$$\text{(b)}\ \ (\sin x H(x)) * (\cos x H(x)) = \frac{1}{2}x\sin x H(x),$$

$$\text{(c)}\ \ (f(x)H(x)) * (H(x))^{*^n} \\ = \frac{H(x)}{(n-1)!}\int_0^x (x-\xi)^{n-1} f(\xi)\,d\xi,$$

onde usamos a notação

$$(H(x))^{*^n} = \underbrace{H(x) * \cdots * H(x)}_{n \text{ vezes}}.$$

(15) Mostre que

$$\text{(a)}\ \ H(x) * \mathrm{Pf}\,\frac{H(x)}{x} = \ln x H(x),$$

$$\text{(b)}\ \ \delta'(x) * \mathrm{Pv}\,\frac{1}{x} = -\,\mathrm{Pf}\,\frac{H(-x)}{x^2} - \mathrm{Pf}\,\frac{H(x)}{x^2},$$

$$\text{(c)}\ \ x^k(f*g) = \sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}(x^n f) * (x^{k-n}g).$$

(16) Seja $f_\alpha(x)$ dada por

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}, \qquad (\alpha > 0).$$

Mostre que

$$f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}.$$

(17) Calcule as seguintes transformadas de Fourier:

$$\text{(a)}\ \ \mathcal{F}[xH(x)] = -i\pi\delta'(k) - \mathrm{Pf}\,\frac{1}{k^2},$$

$$\text{(b)}\ \ \mathcal{F}[xH(-x)] = -i\pi\delta'(k) + \mathrm{Pf}\,\frac{1}{k^2},$$

$$\text{(c)}\ \ \mathcal{F}[\mathrm{sgn}(x)] = 2i\,\mathrm{Pv}\,\frac{1}{k},$$

$$\text{(d)}\ \ \mathcal{F}\left[\mathrm{Pv}\,\frac{1}{x}\right] = i\pi\,\mathrm{sgn}(k),$$

$$\text{(e)}\ \ \mathcal{F}[\,|x|\,] = -2\,\mathrm{Pf}\,\frac{1}{k^2},$$

$$\text{(f)}\ \ \mathcal{F}\left[\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2}\right] = \pi|k|,$$

onde $\mathrm{sgn}(x)$ é a função sinal e

$$\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2} = \mathrm{Pf}\,\frac{H(x)}{x^2} + \mathrm{Pf}\,\frac{H(-x)}{x^2}.$$

(18) Use $\mathcal{L}[f(t)](\sigma - i\omega) = \mathcal{F}[f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}](\omega)$ para mostrar que

$$\mathcal{L}[\delta(at-b)] = \frac{1}{|a|}\mathrm{e}^{-sb/a},$$

onde $s = \sigma - i\omega$.

(19) Sabendo que

$$\mathcal{L}[H(t)\ln t] = -\frac{\gamma + \ln s}{s},$$

onde $\gamma = 0,5772\ldots$ é a constante de Euler, mostre que

$$\text{(a)}\ \ \mathcal{L}\left[\mathrm{pf}\,\frac{H(t)}{t}\right] = -\ln s - \gamma,$$

$$\text{(b)}\ \ \mathcal{L}\left[\mathrm{pf}\,\frac{H(t)}{t^2}\right] = s(\ln s + \gamma - 1).$$