

GEOMETRIA E TOPOLOGIA

JOSÉ RÉGIS AZEVEDO VARÃO FILHO

.....

Sumário

1	Introdução	3
2	Teoria Preliminar	4
2.1	Cálculo Diferencial em \mathbb{R}^n	4
2.2	Funções Holomorfas	9
2.3	Equações Diferenciais	11
2.4	Derivação	13
2.5	Geometria Riemanniana em Abertos de \mathbb{R}^n	15
2.6	Formas Diferenciais	18
3	Teoria em Variedades	21
3.1	Variedades	21
3.2	Espaço tangente	24
3.3	Subvariedade	26
3.4	Exemplos	27
3.5	Valor Regular	31
3.6	Variedade com bordo	31
3.7	Orientação	34
3.7.1	Recobrimento Duplo Orientável	36
3.8	Partições da Unidade	38
3.8.1	Aplicações	39
3.9	Grupos de Lie	41
3.10	Assuntos Diversos	45
4	Fibrados	48
4.1	Fibrado Vetorial	48
4.2	Fibrados	54
4.3	Fibrado dos k-jatos	56

5	Espaço de Funções e Transversalidade	58
5.1	Topologia C^r de Whitney	58
5.2	Densidade de Funções Suaves	63
5.3	Imersões e Mergulhos	65
6	Teorema Colar e Teoria de Morse	69
6.1	Vizinhança Tubular e Teorema Colar	69
6.2	Campos Gradiente	70
6.3	Funções de Morse	71
6.4	Teoria de Morse	73
7	Teoria do grau	77
7.1	Homotopia	79
7.1.1	Aplicação: Variedades Topológica	81
7.2	Funções Próprias	81
8	Teoria de Interseção	83
8.1	Índice de Campos e Característica de Euler	84
8.1.1	Cálculo da Característica de Euler	86
8.2	Teoria de Ponto Fixo	88
9	Teorema de Hopf	91
10	Cohomologia de De Rahn	95
A	Geometria Hiperbólica e Recobrimento Universal de Superfícies	100
A.1	Recobrimento de Variedades	100
A.2	Enunciados	101
A.3	Geometria Hiperbólica	102

1 Introdução

Este trabalho tem por objetivo dar uma visão geométrica dos conceitos da topologia diferencial. As escolhas dos temas aqui tratados, assim como parte da ordenação, foram uma sugestão do professor Welington de Melo.

Na seção **Teoria Preliminar** apresentamos alguns resultados básicos da análise no \mathbb{R}^n , por isso mesmo nem todos os resultados serão provados. Entretanto, os conceitos novos serão tratados com mais detalhes, como por exemplo o conceito de *derivação* em (2.4). A próxima seção, **Teoria em Variedades**, inicia com uma motivação sobre o porquê de se estudar variedades: são objetos naturais de se trabalhar. São dados alguns exemplos e técnicas para se criar variedades (*Valor Regular*). O fato de se andar sobre a Faixa de Möbius e retornar do lado oposto ao que se iniciou é uma característica da Faixa de Möbius que está associado ao conceito de orientação discutido em (3.7). O recobrimento duplo orientável será a maneira usada para tratar as variedades não-orientáveis. Dado que trabalhamos sempre localmente, pare se fazer extensões precisaremos das *Partições da Unidade*.

Damos sequência com **Fibrados**. Um *Fibrado Vetorial* muito natural e que será devidamente apresentado é o fibrado tangente. Extendemos a definição de fibrado vetorial e terminamos com o fibrado dos k -jatos.

Introduzimos uma topologia (de Whitney) no espaço das funções na seção **Espaço de Funções e Transversalidade**. Dizer que dois objetos estão em posição geral é formalizado com a noção de transversalidade. Também falamos de aproximações por funções suaves na topologia de Whitney. Em *Imersões e Mergulhos* aprofundamos o estudo desses dois conceitos.

O Teorema da Vizinhança Tubular visto em **Teorema Colar e Teoria de Morse** aumenta o nosso conhecimento geométrico sobre as variedades. Aprendemos também com o auxílio do Teorema Colar a grudar variedades (soma conexa). A *Teoria de Morse* permite obter informações da variedade por meio de certas funções (de Morse).

As duas próximas seções estão focadas no estudo de invariantes topológicos (e.g. característica de Euler) cujo estudo iniciado em **Teoria do Grau** tem sua generalização com a **Teoria de Interseção**.

O **Teorema de Hopf** fornece uma condição para estender uma função com imagem na esfera definida sobre o bordo de uma variedade N para toda a variedade N . Como aplicação mostramos que toda variedade compacta com característica de Euler zero possui um campo de vetores suave não nulo.

Aprofundamos o estudo das formas diferenciáveis em **Cohomologia de De Rahn**, dentre outras coisas fazemos um paralelo entre a teoria de grau e as formas diferenciáveis.

No apêndice falamos brevemente sobre as superfícies de Riemann, em particular o disco hiperbólico.

2 Teoria Preliminar

Nesta seção desenvolvemos os conceitos no espaço euclidiano e posteriormente os faremos em variedades. Iniciamos com o cálculo diferencial.

2.1 Cálculo Diferencial em \mathbb{R}^n

C^r . Regra da cadeia. Fórmula de Taylor.

Seja $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função. Dizemos que f é diferenciável no ponto $x \in \mathcal{U}$ se existe uma transformação linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que para $h \in \mathbb{R}^n$ pequeno o suficiente para que $x + h \in \mathcal{U}$ tenhamos

$$f(x + h) = f(x) + Ly + r_x(y)$$

satisfazendo,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\|r_x(y)\|}{\|y\|} = 0$$

A norma considerada é a norma euclidiana de \mathbb{R}^k .

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_k^2}$$

onde $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$.

Conseqüentemente

$$Th = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

e isso implica a unicidade da transformação T . Em geral denotaremos T por $df(x)$, $f'(x)$ ou $Df(x)$.

Denotamos por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ao espaço vetorial das transformações lineares de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m . Podemos munir $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ de uma norma da seguinte forma

$$\|A\| = \sup\left\{ \frac{\|Av\|}{\|v\|} ; v \in \mathbb{R}^n \right\} \quad A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

Nos conceitos acima não é relevante o fato de estarmos trabalhando com os espaços euclidianos, poderíamos considerar funções definidas apenas em espaços vetoriais de dimensão finita ¹. Isso nos permitirá falar de derivadas de ordem superior.

Considere $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável em \mathcal{U} . Dizemos que f é duas vezes diferenciável no ponto $x \in \mathcal{U}$ se a função

$$f' : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

¹Seria possível considerar em espaços de Banach com algumas ressalvas. Ao falar da derivada teríamos que pedir que a transformação linear fosse limitada (no sentido da análise funcional).

é diferenciável no ponto x .

Analogamente, diremos que f é duas vezes diferenciável no ponto $x \in \mathcal{U}$ se

$$f'' : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$$

for diferenciável em x .

Observamos que faremos as identificações de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ com $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ que é o conjunto das transformações bilineares de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ em \mathbb{R}^m . Assim como identificaremos $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)))$ com o conjunto $L^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ das transformações trilineares, e assim por diante.

Indutivamente, dizemos que f é k vezes diferenciável em $x \in \mathcal{U}$ se f for $k - 1$ diferenciável em x e

$$f^{(k)} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{L}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

for diferenciável em x .

Dizemos que f é uma função de classe C^1 se $f' : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ for uma função contínua. E f é de classe C^2 em \mathcal{U} se $f' : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ for C^1 em \mathcal{U} . Indutivamente, dizemos que uma função é de classe C^k se $f^{(i-1)}$ for de classe C^1 . E dizemos que f é C^∞ ou suave se for C^k para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sejam $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$ funções diferenciáveis em x e $f(x)$ respectivamente então vale a propriedade conhecida como **regra da cadeia**

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x)$$

Definição 2.1. Dado um subconjunto arbitrário $X \subset \mathbb{R}^m$, dizemos que uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^k para $k \in \{1, 2, \dots\}$ quando f se estende localmente a uma função de classe C^k

Observamos que na definição não estamos falando sobre funções contínuas e o motivo é que é possível ter funções contínuas que não se estendem localmente a funções contínuas. Considere $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$. Considere a função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = y \times \sin(\frac{1}{x})$ se $x \neq 0$ e $f(0, 0) = 0$ não se estende localmente em classe C^0 , pois não admite extensão contínua em nenhuma vizinhança da origem.

Teorema 2.2. *Seja $M \subset \mathbb{R}^{m+r}$ uma superfície de dimensão m . Toda aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k se estende globalmente em classe C^k .*

Demonstração. Considere uma vizinhança tubular de M . Seja π como no Teorema 6.3. Basta tomarmos a função

$$F : V_\epsilon(M) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \mapsto f \circ \pi(x)$$

Sendo F a extensão procurada. □

Teorema 2.3 (Fórmula de Taylor). *Seja $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Se f é k -vezes diferenciável em \mathcal{U} e existe $x_0 \in \mathcal{U}$ tal que $f^{(k+1)}(x_0)$ existe então para todo $h \in \mathbb{R}^n$ pequeno tal que $x_0 + h$ esteja em \mathcal{U} temos*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \dots + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0) \cdot (h)^{k+1} + r(h)$$

onde o resto $r(h)$ satisfaz

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{|h|^{s+1}}$$

Teorema 2.4 (Teorema da função inversa). *Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k em \mathcal{U} ($1 \leq k \leq \infty$). Se $Df(x_0)$ é um isomorfismo, com $x_0 \in \mathcal{U}$, então existem vizinhanças, \mathcal{V}_{x_0} e $\mathcal{V}_{f(x_0)}$, de x_0 e $f(x_0)$ respectivamente, tais que a função f restrita a \mathcal{V}_{x_0} é um difeomorfismo de classe C^k sobre $\mathcal{V}_{f(x_0)}$.*

Teorema 2.5 (Forma local das imersões). *Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$). Se $x_0 \in \mathcal{U}$ é tal que $Df(x_0)$ é injetiva, então existem vizinhanças $\mathcal{V}_{f(x_0)} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $\mathcal{W}_{x_0} \subset \mathbb{R}^m$, $\mathcal{Z}_0 \subset \mathbb{R}^n$ de $f(x_0)$, x_0 e 0 respectivamente e um difeomorfismo*

$$h : \mathcal{V}_{f(x_0)} \times \rightarrow \mathcal{W}_{x_0} \times \mathcal{Z}_0$$

tal que

$$h \circ f(x) = (x, 0)$$

para todo $x \in \mathcal{W}_{x_0}$.

Teorema 2.6 (Forma local das submersões). *Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$). Se $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ é tal que $Df(z_0)$ restrita ao subspaço $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ é um isomorfismo então existem vizinhanças $\mathcal{V}_{f(z_0)} \subset \mathbb{R}^m$, $\mathcal{Y}_{y_0} \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{Z}_{z_0} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ de $f(z_0)$, x_0 e z_0 respectivamente, e um difeomorfismo*

$$h : \mathcal{V}_{f(z_0)} \times \mathcal{Y}_{y_0} \rightarrow \mathcal{Z}_{z_0}$$

tal que

$$f \circ h(w, y) = w$$

para todo $(w, y) \in \mathcal{V}_{f(z_0)} \times \mathcal{Y}_{y_0}$

Bump-function.

Faremos agora a construção das funções conhecidas genericamente como bump-function. Primeiramente vejamos que podemos definir uma função $\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ suave tal que $0 \leq \xi(x) \leq 1$ para todo x e mais $\xi|_{B[1]} = 1$, $\xi(x) = 0$ se $x \notin B[2]$ e quando $1 < |x| < 2$ tem-se $0 < \xi(x) < 1$.

Para a construção da função ξ faremos uma exposição sem gráficos, no entanto sugerimos que o leitor faça o gráfico de cada função para obter a intuição por trás das contas. É sabido dos cursos básicos de análise que a função

$$\begin{aligned}\alpha &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha(t) &= 0 \text{ se } t \leq 0 \\ \alpha(t) &= \exp(-1/t) \text{ se } t > 0\end{aligned}$$

é uma função suave. Definimos agora $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ colocando $\beta(t) = \alpha(t + 2) \cdot \alpha(-1 - t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Claro que β também é suave. Seja $b = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(t) dt = \int_{-2}^{-1} \beta(t) dt$. Definamos agora a seguinte função $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suave, definida por $\gamma(t) = \beta(t)/b$ se $t \leq 0$ e $\gamma(t) = \beta(-t)/b$ se $t > 0$. Seja $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave definida por $\delta(t) = \int_{-\infty}^t \gamma(s) ds = \int_{-2}^t \gamma(s) ds$. Por fim a função ξ procurada é definida por

$$\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } \xi(x) = \delta(|x|)$$

Sendo ξ constante em torno de zero vemos que de fato ξ é suave.

Uma observação simples, porém útil, é que dado um número $\delta > 0$ e a função ξ acima, se definirmos $\tilde{\xi}(x) = \xi(\delta x)$ então modificamos o “raio de atuação” de nossa função para tão pequeno ou tão grande quanto quisermos.

Teorema de Sard.

Seja $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, uma função diferenciável, onde \mathcal{U} e \mathcal{V} são abertos de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m respectivamente, então $y \in \mathcal{V}$ é chamado de **valor regular** se para todo $x \in f^{-1}(y)$ tem-se que $Df(x)$ é sobrejetiva, se y não for valor regular então o chamamos de **valor crítico**, se $x \in mc\mathcal{U}$ não possui derivada sobrejetiva então x é considerado como **ponto crítico**.

Teorema 2.7 (Teorema de Sard). *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^k . Se $k \geq \max\{n - m + 1, 1\}$, então a imagem dos pontos críticos de f possuem medida de Lebesgue nula em \mathbb{R}^m .*

Esta é a versão clássica do teorema de Sard, porém Bates² provou uma versão um pouco mais refinada. No entanto usaremos o teorema apenas no caso em que f é uma função suave, portanto daremos a prova apenas para este caso. Por conseguinte provaremos a seguinte versão;

- Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ suave. Então $f(C)$ tem medida nula onde C é o conjunto dos pontos críticos de f .

²S.M.Bates, *Toward a Precise Smoothness Hypothesis in Sard's Theorem*, Proceedings of the AMS, Vol 117, No 1, 1993.

Demonstração do Teorema de Sard. retângulo sólido e S_1, S_2, \dots uma cobertura de S então sabemos que $\sum vol(S_j) \geq vol(S)$.

se $A \subset U$ tem medidade zero então $F(A)$ tem medida zero. De fato, podemos supor que o feixe de A é compacto e usamos a continuidade da derivada o que pelo teorema do valor médio nos dá uma cota uniforme extensão entre dois pontos e com isso provamos. Assim, se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ suave. Se $m > n$ temos que $f(U)$ tem medida nula em \mathbb{R}^m .

o teorema enunciado acima a ter que provar o seguinte: Suponha que $U \subset \mathbb{R}^n$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$. Seja C o conjunto dos pontos críticos de f então $f(C)$ tem medida nula em \mathbb{R}^p

A prova é feita por indução. É válido para $n = 0$. Suponhamos então que seja válido para $n - 1$ e provemos que vale para n . Particionamos C em uma seqüência $C \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$ sendo C_1 o conjunto de todos os $x \in U$ tais que $(df)_x = 0$, e C_i é o conjunto de todos os x tais que as derivadas de ordem menores ou igual a i somem em x .

O teorema seguirá de uma seqüência de três lemas.

Lema 2.1. *O conjunto $f(C - C_1)$ tem medida nula.*

Demonstração. Seja $x \in C - C_1$, basta provar que existe um aberto V tal que $f(V \cap C)$ tem medida nula.

Como $x \notin C_1$, sem perda de generalidade, suponha que $\frac{\partial f}{\partial x_1} \neq 0$. temos $f = (f_1, \dots, f_p)$ e considere a seguinte função h definida como,

$$h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$h(x) = (f_1(x), x_2, \dots, x_n)$$

Assim dh_x é não singular e pelo teorema da função inversa h manda uma vizinhança V de x difeomorficamente sobre o aberto V' . Definindo $g := f \circ h^{-1} : V' \rightarrow \mathbb{R}^p$ terá os mesmos valores críticos de f restrita a V . A função g é da forma $g(t, x_2, \dots, x_n) = (t, g_2, \dots, g_n)$. Portanto podemos olhar para a função g_t , fixando t .

Tiramos que $Jg = 1 \cdot Jg_t$, onde J representa o jacobiano. Concluimos que um ponto de $t \times \mathbb{R}^{n-1}$ é crítico para g_t se, e somente se, for um ponto crítico de g . E pela hipótese de indução o conjunto dos valores críticos de g_t tem medida nula. E pelo teorema de Fubini temos que o conjunto dos valores críticos de g tem medida nula, como queríamos. \square

Lema 2.2. *$f(C_k - C_{k+1})$ tem medida nula para $k \geq 1$.*

Demonstração. Seja $x \in C_k - C_{k+1}$, chamemos de ρ a derivada de ordem parcial de f de ordem k tal que em x $\frac{\partial \rho}{\partial x_1} \neq 0$. Como feito no lema anterior, a função,

$$h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$h(x) = (\rho(x), x_2, \dots, x_n)$$

pelo teorema da função inversa h leva uma vizinhança, V de x difeomorficamente em um aberto V' e $h(C_k \cap V) \subset 0 \times \mathbb{R}^{n-1}$. Assim a função $g = f \circ h^{-1}$ tem todos os seus pontos críticos do tipo C^k contidos em $0 \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Considerando a função g_0 como sendo a restrição de g a $(0 \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V'$ tem, por hipótese de indução, tem que o conjunto dos valores críticos tem medida nula. E como os pontos críticos de g da forma C_k são pontos críticos de g_0 temos o que queríamos. \square

Lema 2.3. *Existe k_0 tal que para $k \geq k_0$ tem-se que $f(C_k)$ tem medida nula.*

Demonstração. Seja $S \subset U$ um cubo de lado δ . Pelo teorema de Taylor, temos que para $x \in C_k \cap S$, $x + h \in S$ e existe $a \in \mathbb{R}$ dependendo apenas de f e S satisfazendo

$$f(x + h) = f(x) + R(x, h)$$

$$|R(x, h)| < a|h|^{k+1}$$

Dividimos S em r^n cubos cujos lados medem δ/r . Seja S_1 um cubo desta divisão que contém um ponto $x \in C_k$. Então podemos escrever um ponto de S_1 como sendo $x + h$ com $|h| < \sqrt{n}(\frac{\delta}{r})$.

Da fórmula de Taylor, $f(S_1)$ está contido em um cubo cujos lados medem $b/rk + 1$ onde $b = 2a(\sqrt{n}\delta)^{k+1}$. Portanto $f(C_k \cap S)$ está contido na união de no máximo r^n cubos cujo volume total, v , é menor que

$$v \leq r^n \left(\frac{b}{r^{k+1}} \right)^p$$

Assim, se $k+1 > n/p$ temos que v tende a zero quando $r \rightarrow \infty$. Provando assim o que queríamos. \square

Os três lemas acima provam o Teorema de Sard. \square

2.2 Funções Holomorfas

Denotemos por \mathbb{C} o conjunto dos números complexos. Podemos olhar \mathbb{C} como \mathbb{R}^2 naturalmente pela identificação, se $z = a + ib \in \mathbb{C}$ pode ser visto como o par $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, sua norma é $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ podemos olhá-la como uma função de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 e assim falar da derivada de f como anteriormente.

Consideremos $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ o conjunto das transformações lineares de \mathbb{C} em \mathbb{C} , com os números complexos vistos como espaço vetorial sobre os reais. Um fato da álgebra linear é que a função definida abaixo por

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$$

$$(a, b) \mapsto L_{a,b} : z \mapsto az + b\bar{z}$$

é \mathbb{R} -linear e binunívoca, logo um isomorfismo. Portanto se f é diferenciável em p , do ponto de vista real, o isomorfismo acima garante que existem números complexos (unicamente determinados) $\partial f(p), \bar{\partial} f(p) \in \mathbb{C}$ tal que

$$df(p)h = \partial f(p)h + \bar{\partial} f(p)\bar{h}$$

Definição 2.8. f é holomorfa se $\bar{\partial} f(p) = 0 \forall p \in \mathcal{U}$

Ser holomorfa, equivale a dizer que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é diferenciável no sentido complexo, ou seja que o limite

$$\lim_{h \rightarrow z_0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}, \quad z_0, h \in \mathbb{C}$$

existe. Escrevendo $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ na sua parte real e imaginária, as condições de Cauchy-Riemann são

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

que equivalem a condição $\bar{\partial} f(p) = 0$.

Analogamente podemos falar de funções holomorfas em várias variáveis. Considere $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, C^1 . A derivada, $df(p) \in L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ então existem números complexos.

$$\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}(p)$$

Tal que

$$df(p)h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} h_j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \bar{h}_j$$

Definição 2.9. f é holomorfa se e somente se $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0$

Dizemos que $D \subset \mathbb{C}$ é um domínio se for um aberto conexo (logo conexo por caminhos).

Teorema 2.10 (Fórmula Integral de Cauchy). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Se $D \subset \Omega$ é um domínio com fronteira suave então*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad z \in D$$

Este teorema implica o importante corolário

Corolário 2.1.

$$f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z)^{m+1}} dw, \quad z \in D, m \geq 0$$

Corolário 2.2. *Se f é holomorfa então f possui todas derivadas. E mais, $f^{(k)}$ é holomorfa.*

Teorema 2.11. *Se f é holomorfa em $|z - z_0| < \rho$. Então f é representada com série de potências.*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < \rho$$

Um outro tipo importante de função são as funções **analíticas**. Dizemos que uma função $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ suave de definida em um aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ é analítica se pode ser escrita como série de potências. E como vimos toda função holomorfa é uma função analítica.

Dizemos que uma função é aberta se leva aberto em aberto.

Teorema 2.12. *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa não constante, então f é uma função aberta.*

2.3 Equações Diferenciais

Seja $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Um **campo de vetores**, f de classe C^k sobre \mathcal{U} é uma aplicação

$$f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

de classe C^k . As curvas integrais, $\phi : I \rightarrow \mathcal{Y}$ ($I \subset \mathbb{R}$ um intervalo), associadas a este campo são as soluções da equação diferencial

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) \tag{1}$$

Dizemos que $x_0 \in \mathcal{U}$ é uma singularidade do campo f se $f(x_0) = 0$. $\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$ definida por $\phi(t) = x_0 \forall t \in \mathbb{R}$ é uma curva integral do campo f . O parâmetro t em geral é chamado de tempo. Um campo de vetores deve ser olhado como o vetor velocidade de alguma curva integral que passa pelo ponto.

A equação diferencial (1) é chamada de *autônoma*, pois o campo f independe do tempo. Poderíamos considerar que para tempos diferentes tivéssemos, em princípio, campos diferentes (i.é, $f = f(x, t)$) e poderíamos nos perguntar sobre as soluções da equação, chamada agora de *não autônoma*,

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, t) \tag{2}$$

Uma equação não autônoma pode ser sempre reduzida a uma equação autônoma. Suponha $f : \mathcal{U} \times I \rightarrow \mathcal{U}$, definamos $y = (x, s)$ e $g(y) = (1, f(y))$, e considere a seguinte equação diferencial, $y' = g(y)$. E reduzimos a equação (2) para uma equação do tipo de (1).

Uma curva integral $\varphi : I \rightarrow \mathcal{U}$ é dita **maximal** se dada uma curva integral $\psi : J \rightarrow \mathcal{U}$ tal que $I \subset J$ e $\varphi(t) = \psi(t)$ para $t \in I$ então $I = J$. O intervalo I será chamado de intervalo maximal e usualmente denotado por $I = (\omega_-(x), \omega_+(x))$, onde $\phi(0) = x$.

Teorema 2.13. *Seja f um campo de vetores C^k sobre $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, então*

- **Existência de curvas integrais:**

$\forall x \in \mathcal{U}$ existe um intervalo aberto I_x e uma única solução $\phi_x : I_x \rightarrow \mathcal{U}$, para a equação (1) tal que $\phi_x(0) = x$

- **Diferenciabilidade com relação aos dados iniciais:**

Seja $\mathcal{D} = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid x \in \mathcal{U} \text{ e } t \in I_x\}$. Então \mathcal{D} é aberto e

$$\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x, t) = \phi_x(t)$$

é de classe C^k .

A unicidade garante podermos sempre falar em curva maximal.

Se as curvas integrais de um campo, X , estão definidas para todo tempo dizemos que X é um **campo completo**. E chamamos de **fluxo** a função:

$$\phi : \mathcal{U} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$$

$$\phi(x, t) = \phi_x(t)$$

Onde a ϕ_x é a curva integral tal que $\phi_x(0) = x$.

Proposição 2.1. *Seja $X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo C^1 e $\varphi_x : (\omega_-(x), \omega_+(x)) \rightarrow \mathcal{U}$ uma curva integral com $\omega_+(x) < \infty$. Dado $K \subset \mathcal{U}$, um compacto, então existe $t_0 \in (0, \omega_+(x))$ tal que $\varphi(t) \notin K, \forall t \in (t_0, \omega_+(x))$.*

O mesmo vale se $\omega_-(x) > -\infty$, neste caso $t_0 \in (\omega_-(x), 0)$ e $\varphi(t) \notin K, \forall t \in (\omega_-(x), t_0)$.

Demonstração. Por absurdo, suponha que exista um compacto $K \subset \mathcal{U}$ e seqüência $\{t_n\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \omega_+(x)$ com $\varphi_x(t_n) \in K$. Por compacidade existe subseqüência convergente de $\varphi_x(t_n)$ em K . Reindexando se necessário, podemos supor que $\varphi_x(t_n) \rightarrow x_0 \in K$.

Seja V_{x_0} uma vizinhança de x_0 tal que toda curva solução que começa em V_{x_0} esteja definida em pelo menos um tempo $\epsilon > 0$. Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ grande o suficiente para que $t_{n_0} + \delta > \omega_+(x)$. A curva solução que passa por $\varphi_x(t_{n_0})$ está definida em pelo menos tempo δ , por unicidade de solução a curva integral φ_x está definida em $t_{n_0} + \delta > \omega_+(x)$ absurdo com o fato de φ_x ser maximal. \square

Corolário 2.3. *Todo campo que se anula fora de um compacto é completo.*

geodésicas.
integrais)

Sejam $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ um difeomorfismo suave e $X : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo suave em \mathcal{V} . Dizemos que o campo $Y : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é **pull-back** do campo X por f e denotado por $Y = f^*X$ se

$$Df_p Y(p) = X(p)$$

Proposição 2.2. *O difeomorfismo f , como acima, leva curvas integrais de Y em curvas integrais de X .*

Demonstração. Basta checar a condição de unicidade. Isto é, ser solução da EDO com dado inicial. \square

2.4 Derivação

Seja $\mathfrak{X}^\infty(\mathcal{U})$ o conjunto dos campos de vetores C^∞ , isto é suaves, sobre o aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. Faremos uma abordagem nova sobre como trabalhar com campos de vetores, mas fica o alerta da importância de não se perder a intuição nas coisas. Chamemos por $C^\infty(\mathcal{U})$ como de costume ao conjunto das funções suaves $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definição 2.14. Seja $\mathcal{D} : C^\infty(\mathcal{U}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{U})$ uma função, dizemos que \mathcal{D} é uma derivação se satisfaz as duas propriedades seguintes:

- \mathcal{D} é linear.
- $\mathcal{D}(f \cdot g) = f\mathcal{D}(g) + \mathcal{D}(f)g$. (Regra de Leibniz)

O nome derivação não é uma mera semelhança com a palavra derivada, note-se a regra de Leibniz. Uma propriedade simples e importante é de que uma derivação atuando em uma função constante é a função nula. De fato, $\mathcal{D}(c) = c\mathcal{D}(1)$ e $\mathcal{D}(1) = 0$ já que pela regra de Leibniz $\mathcal{D}(1) = \mathcal{D}(1 \cdot 1) = \mathcal{D}(1) + \mathcal{D}(1)$.

A todo campo $X \in \mathfrak{X}^\infty(\mathcal{U})$ associamos a seguinte derivação

$$\mathcal{L}_X : C^\infty(\mathcal{U}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{U}) \text{ onde } \mathcal{L}_X(f)(p) = Df(p)X(p)$$

Olhando em coordenadas, $X(x) = (a_1(x), \dots, a_m(x))$ e por definição

$$\mathcal{L}_X(f)(p) = \sum_{i=1}^m a_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Dada uma derivação \mathcal{L}_X podemos escrever o campo X em coordenadas como $X(x) = (\mathcal{L}_X(\pi_1), \dots, \mathcal{L}_X(\pi_m))$ onde $\pi_i : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ representa a função projeção da i -ésima coordenada.

Proposição 2.3. *Toda derivação em $C^\infty(\mathcal{U})$ provém de um campo de vetores.*

Demonstração. Seja \mathcal{D} uma derivação, queremos ver que existe um campo $X \in \mathfrak{X}^\infty(\mathcal{U})$ tal que $\mathcal{D} = \mathcal{L}_X$. Pelo comentado anteriormente o candidato ao campo vetorial X quando olhado em coordenadas é dado por $X(x) = (\mathcal{L}_X(\pi_1), \dots, \mathcal{L}_X(\pi_m))$ com π_i como na notação acima.

Queremos ver que $S = (\mathcal{D} - \mathcal{L}_X)(f) = 0$ para toda $f \in C^\infty(\mathcal{U})$. Por construção temos que $S(x_i) = 0$ ou mais, que S se anula em todo polinômio de grau menor ou igual a 1. Seja $f \in C^\infty$, pelo Lema 8.1 temos que $f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^m a_i(x)x_i$. Portanto $S(f)(0) = S(f)(0) + \sum_{i=1}^m a_i(0)S(x_i) + \sum_{i=1}^m (x_i S(a_i))(0) = 0$. \square

O resultado acima nos permite identificar derivações e campos de vetores. derivações. E dar o exemplo em \mathbb{R}^n

Definição 2.15. Definimos o *colchete de Lie* entre dois campos X e Y por

$$[X, Y] = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X$$

É comum também escrevermos apenas $[X, Y] = XY - YX$.

Proposição 2.4. *O colchete de Lie $[X, Y]$ é uma derivação.*

Demonstração. Basta fazer as contas com a definição. \square

Ou seja dados dois campos sempre podemos associar um outro pelo colchete de Lie.

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^\infty(\mathcal{U}) \times \mathfrak{X}^\infty(\mathcal{U}) &\rightarrow \mathfrak{X}^\infty(\mathcal{U}) \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y] \end{aligned}$$

Proposição 2.5. *Sejam X, Y, Z campos suaves em $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in C^\infty(\mathcal{U})$. Então o colchete de Lie satisfaz as seguintes propriedades*

- $[X, Y] = -[Y, X]$;
- $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$;
- $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (*identidade de Jacobi*);
- $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Demonstração. Apenas realizar as devidas manipulações algébricas. \square

Considere $\psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ um difeomorfismo, lembramos que dado um campo X em \mathcal{U} o push-forward de X por ψ é $\psi_* X = Y$ onde $Y(p) = d\psi_{\psi^{-1}(p)} X(\psi^{-1}(p))$.

Lema 2.4. *Seja $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ então*

$$(\psi_* X)(f)(p) = X(f \circ \psi)(\psi^{-1}(p))$$

Demonstração. Segue das seguintes contas,

$$(\psi_* X)(f)(p) = (d\psi \circ X)(f)(p) = (df \circ d\psi \circ X)(\psi^{-1}(p)) = X(f \circ \psi)(\psi^{-1}(p)).$$

□

Obtemos o seguinte resultado.

Proposição 2.6. *Seja $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ um difeomorfismo entre abertos \mathcal{U} e \mathcal{V} , e sejam X e Y campos de vetores em \mathcal{U} então*

$$[\phi_* X, \phi_* Y] = \phi_* [X, Y]$$

Demonstração. Segue do lema acima. □

O próximo resultado é geometricamente importante dado que fornece uma idéia intuitiva para o colchete.

Teorema 2.16. *Sejam X, Y campos em \mathcal{U} e ϕ_t o fluxo de X em torno de p então*

$$[X, Y]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Y_p - d\phi_{-t}(Y_{\phi_t(p)})]$$

Veja que o colchete de X e Y pode ser olhado como uma derivada do campo Y em relação ao campo X .

garante a boa definição em variedade.

2.5 Geometria Riemanniana em Abertos de \mathbb{R}^n

Seja $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, uma métrica, g , em \mathcal{U} é uma função que associa a cada ponto $p \in \mathcal{U}$ um produto interno de maneira suave, ou seja

$$g : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

onde $g(p, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é um produto interno, e para quaisquer dois campos $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(\mathcal{U})$, $g(p, X(p), Y(p))$ é uma função suave.

Considere \mathbb{R}^n com uma métrica associada a ele, denotamos $g(p, \cdot, \cdot)$ também por \langle, \rangle_p . Podemos medir comprimento de curvas em (\mathbb{R}^n, g) de maneira muito natural. Dado $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ uma curva (diferenciável por partes) definimos o seu **comprimento** $L(\gamma)$ por

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_{\gamma(t)}} dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|; dt$$

O aberto \mathcal{U} é munido naturalmente de uma métrica a qual chamaremos de **métrica riemanniana**, definida como

$$d_g : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d_g(p, q) = \inf \{L(\gamma) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U} \text{ suave e } \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}$$

Proposição 2.7. *A topologia induzida por d_g coincide com a topologia euclidiana.*

riemanniana.

Intimamente ligado a função comprimento está a energia da curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ definida por

$$E(\gamma) = \int_a^b \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_{\gamma(t)} dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|^2 dt$$

Dizemos que uma curva minimiza a energia E se para toda variação da curva γ preservando o ponto inicial e final, a curva γ sempre minimiza a energia. Formalizando,

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}, \quad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

Defina agora,

$$\gamma_\epsilon(t) = (\gamma_1(t) + \epsilon c_1(t), \dots, \gamma_n(t) + \epsilon c_n(t))$$

onde $c_i \in C^\infty([a, b])$ tal que $c_i(a) = c_i(b) = 0$.

E portanto, se estamos afirmando que γ minimiza a energia então o zero é ponto crítico da função $E(\gamma_\epsilon)$,

$$\frac{dE(\gamma_\epsilon)}{d\epsilon}(0) = 0$$

O que faremos agora não é específico do caso que tratamos, por isso consideraremos a energia da forma

$$E(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(t), \frac{d}{dt}\gamma(t)) dt$$

E o que falamos sobre minimizar é igualmente definido para este caso. E olhamos $L = L(x, v)$.

$$0 = \frac{dE(\gamma_\epsilon)}{d\epsilon} = \int_a^b \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial x_i}(\gamma_0(t), \frac{d\gamma_0}{dt}(0)) c_i(t) + \frac{\partial L}{\partial v_i}(\gamma_0(t), \frac{d\gamma_0}{dt}(0)) \frac{dc_i}{dt}(t) \right] dt$$

Utilizando integral por partes, obtemos

$$\int_a^b \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial x_i}(\gamma_0(t), \frac{d\gamma_0}{dt}(0)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i}(\gamma_0(t), \frac{d\gamma_0}{dt}(0)) \right] c_i(t) dt = 0$$

Como as funções c_i são arbitrárias (satisfazendo zero nos extremos) então temos que $\frac{\partial L}{\partial x_i}(\gamma_0(t), \frac{d\gamma_0}{dt}(0)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i}(\gamma_0(t), \frac{d\gamma_0}{dt}(0)) = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Por conseguinte definimos a equação de **Euler-Lagrange** por

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\gamma_0(t), \frac{d\gamma_0}{dt}(0)) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i}(\gamma_0(t), \frac{d\gamma_0}{dt}(0))$$

função chamada de exponencial.

Definição 2.17. Uma curva γ é chamada de geodésica se satisfaz a equação de Euler-Lagrange para a energia.

Iniciamos a discussão falando sobre curvas que minimizavam a energia, mas estamos apenas dizendo que as geodésicas são pontos críticos da energia, no entanto o próximo resultado revela que é verdade localmente.

Teorema 2.18. *Considere uma geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$, então para intervalo $[a_1, b_1]$ suficientemente pequeno a curva γ restrita ao intervalo $[a_1, b_1]$ minimiza a energia.*

Geodésicas minimizam energia (localmente), e de fato apenas as geodésicas minimizam (localmente) a distância. Uma função $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ suave, onde cada aberto possui uma métrica riemanniana é chamada de **isometria** se f preservar geodésica. Isto é, se γ é geodésica então $f \circ \gamma$ também é geodésica.

Teorema 2.19. *A equação de Euler Lagrange para a função energia é*

$$x_i''(t) + \Gamma_{jk}^i(x(t))x_j'(t)x_k'(t) = 0 \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

com

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{il}(g_{jl,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l})$$

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} \quad g_{jl,k} = \frac{\partial}{\partial x_k} g_{jl}$$

O teorema acima nos mostra que as geodésicas satisfazem uma equação ordinária de segunda ordem, satisfazem portanto

$$x_i''(t) + \Gamma_{jk}^i(x(t))x_j'(t)x_k'(t) = 0 \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Podemos definir a função **exponencial** da seguinte maneira. Dado $p \in U$ existe uma vizinhança $V \subset U$ de p e $\epsilon > 0$ tal que para todo $q \in V$, $B(0, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n$ a função

$$\exp_q : B(0, \epsilon) \rightarrow U$$

é um difeomorfismo C^∞ e

$$B(0, \epsilon) \times V \rightarrow U$$

$$(w, q) \mapsto \exp_q w$$

é C^∞ .

2.6 Formas Diferenciais

Denotamos por $\wedge^k(\mathbb{R}^n)$ o espaço das k-formas lineares alternada. Ou seja, $T \in \wedge^k(\mathbb{R}^n)$ então T é da forma

$$T : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

- T é k-linear
- $T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) T(v_1, \dots, v_k)$.

Onde $\sigma \in \mathcal{S}_k = \{ \text{permutações de k elementos} \}$, e $\text{sgn}(\sigma)$ é o sinal da permutação σ .

Segue diretamente da definição que

$$\wedge^1(\mathbb{R}^n) = (\mathbb{R}^n)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

Podemos definir um produto entre duas formas alternadas, que chamamos de **produto exterior**. Sejam duas formas alternadas $T \in \wedge^l(\mathbb{R}^n)$ e $L \in \wedge^k(\mathbb{R}^n)$ o produto exterior

$$T \wedge L \in \wedge^{l+k}(\mathbb{R}^n)$$

é definido como

$$T \wedge L(v_1, \dots, v_{l+k}) = \frac{1}{(l+k)!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) T(v_1, \dots, v_l) L(v_{l+1}, \dots, v_{l+k})$$

Uma **k-forma diferenciável** ω , definida em um aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação que associa a cada $p \in \mathcal{U}$ uma k-forma alternada, $\omega(p)$ de maneira diferenciável. Dizer que $\omega(p)$ varia diferenciavelmente com relação a p significa que dados $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}^\infty(\mathcal{U})$ então $\omega(p)(X_1(p), \dots, X_k(p))$ visto como função de p é suave.

Considere uma l-forma diferenciável ω e uma k-forma diferenciável η definidas em \mathcal{U} , definimos o produto exterior $\omega \wedge \eta$ da seguinte forma

$$\omega \wedge \eta(p) := \omega(p) \wedge \eta(p)$$

$\Omega^k(\mathcal{U})$ é o conjunto de todas as k-formas definidas no aberto \mathcal{U}

Seja $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ um função suave entre abertos de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m . Dado $\omega \in \Omega^k(\mathcal{V})$ a forma $f^*\omega \in \Omega^k(\mathcal{U})$ é chamada de **pull-back** da forma ω por f e definida como

$$f^*\omega(p)(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(p))(Df_p v_1, \dots, Df_p v_k)$$

$$\forall p \in \mathcal{U}, \quad \forall v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$$

E portanto uma função suave $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ uma função f^*

$$f^* : \Omega^k(\mathcal{V}) \rightarrow \Omega^k(\mathcal{U})$$

Seja $\omega \in \Omega^k(\mathcal{U})$ um k-forma da forma

$$\omega(x) = a(x)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

como ω é suave então $a : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave. Definimos a **derivada exterior** de ω por

$$d\omega(x) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial a(x)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Estendemos por linearidade para qualquer $\omega \in \Omega^k(\mathcal{U})$. Note que a derivada exterior é um operador

$$d : \Omega^k(\mathcal{U}) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathcal{U})$$

Teorema 2.20. *Sejam $\omega \in \Omega^k(\mathcal{U})$, $\eta \in \Omega^l(\mathcal{U})$, $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$, $g : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$ suaves, então*

- $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$
- $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
- $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$
- $d \circ d = 0$
- $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$

O **produto interior** de uma forma, $\omega \in \Omega^k(\mathcal{U})$, com relação a um campo $X \in \mathfrak{X}^\infty(\mathcal{U})$ é denotada por $i(X)\omega$, de fato definida por

$$i(X) : \Omega^k(\mathcal{U}) \rightarrow \Omega^{k-1}(\mathcal{U})$$

$$(i(X)(\omega))(x)(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega(X(x), v_1, \dots, v_{k-1})$$

Proposição 2.8. *Sejam $\omega \in \Omega^k(\mathcal{U})$ e $\eta \in \Omega^l(\mathcal{U})$, então*

$$i(X)(\omega \wedge \eta) = i(X)\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge i(X)\eta$$

veremos uma maneira mais geométrica de visualizá-la. O operador L_X definido a seguir é o operador derivada de Lie com relação ao campo $X \in \mathfrak{X}^\infty(\mathcal{U})$.

Definimos agora a derivada de Lie de uma forma diferencial com relação a um campo X .

$$L_X : \Omega^k(\mathcal{U}) \rightarrow \Omega^k(\mathcal{U})$$

$$L_X\omega(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* \omega(\phi_t)$$

onde $\phi_t : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ é fluxo no tempo t do campo $X \in \mathfrak{X}^\infty$.

Teorema 2.21. (*Fórmula de Cartan*)

- $L_X i(Y) - i(Y)L_X = i([X, Y])$
- $L_X = i(X)d + di(X)$

3 Teoria em Variedades

Começamos discutindo de maneira informal um exemplo para motivar a naturalidade com que as variedades aparecem, e mais a frente todas as ideias serão formalizadas.

partícula. Em particular um sólido, introduz informalmente $SU(3)$ e $SU(n)$.

Suponha que você queira estudar o espaço de configurações de um sistema de partículas. Tratemos o caso em que temos um sólido, ou seja a distância entre suas partículas é constante, isto implica que determinado três pontos podemos determinar os outros. Fixe portanto três pontos P_1, P_2 e P_3 do nosso sólido, sem perda de generalidade podemos supor que o vetor $P_2 - P_1$ e $P_3 - P_1$ são ortogonais. Para determinar o seu espaço de configurações precisamos determinar a posição do primeiro ponto, no caso P_1 que é um ponto do espaço, logo $P_1 \in \mathbb{R}^3$, queremos determinar o ponto P_2 todavia sabemos a distância do ponto P_1 ao ponto P_2 o que portanto basta acharmos em que direção encontra-se o ponto P_2 , ou seja temos uma esfera de possibilidades em torno do ponto P_1 , precisamos portanto de duas coordenadas para determinar a direção do ponto P_2 , agora queremos determinar o ponto P_3 como $P_2 - P_1$ e $P_3 - P_1$ são ortogonais temos uma circunferência ortogonal a reta que liga P_1 e P_2 de possibilidades.

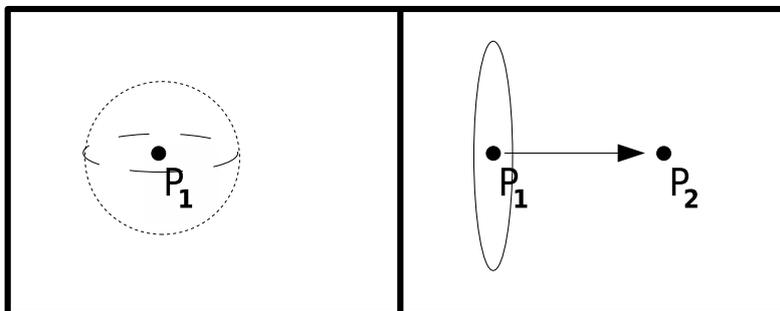


Figura 1: Sólido

Ou seja, essencialmente temos que o espaço de configuração para um sólido pode ser visto como a variedade

$$\mathbb{R}^3 \times \{ \text{referencial ortogonal de } \mathbb{R}^3 \}$$

O conjunto $\{ \text{referencial ortogonal de } \mathbb{R}^3 \}$ é também conhecido como $O(3)$.

3.1 Variedades

As variedades são objetos que aparecem muito naturalmente na física e na matemática como ilustrado acima, por isso a importância em estudá-las. Passemos a sua definição.

Definição 3.1. Seja M um espaço topológico, então M é uma variedade topológica se

- M é Hausdorff;
- Existe um conjunto com quantidade enumerável de abertos que formam uma base para a topologia de M , i.e. M é segundo contável;
- Dado $p \in M$ existe vizinhança $V \subset M$ de p e um homeomorfismo $\phi : V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$.

Trabalharemos sempre supondo variedades conexas, a menos que mencionado o contrário explicitamente.

Seja M uma variedade topológica. Considere o seguinte conjunto

$$\mathcal{A} = \{(\phi_i, V_i) \mid M = \bigcup_{i \in I} V_i \text{ } \phi_i : V_i \rightarrow U_i \text{ homeomorfismo}\}$$

onde $V_i \subset M$ e $U_i \subset \mathbb{R}^n$ são abertos. Dizemos que \mathcal{A} é um **atlas** para a variedade M . As funções ϕ_i serão chamadas de **carta local**. E suas inversas serão chamadas de **parametrizações locais** de M . Chamaremos também de **mudança de coordenadas** as funções do tipo $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$.

Dizemos que \mathcal{A} é um atlas de classe C^r se as mudanças de coordenadas são funções de classe C^r . Podemos falar também de atlas C^ω , ou seja analítico real. Na definição 3.1 poderíamos tomar homeomorfismo com imagem em \mathbb{C}^n e assim poderíamos falar de **atlas holomorfo**, ou seja que as mudanças de coordenadas são funções holomorfas.

M é dita uma **variedade diferenciável** de classe C^r e dimensão n , onde r é um natural. Se existe cobertura aberta, $\{V_i\}_{i \in I}$, de M , abertos $\{U_i\}_{i \in I}$ em \mathbb{R}^n , homeomorfismos $\{\phi_i : V_i \rightarrow U_i\}_{i \in I}$ tais que $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(V_i \cap V_j) \rightarrow \phi_j(V_i \cap V_j)$ é de classe C^r .

Podemos definir **atlas maximal**, como sendo o atlas \mathcal{A} que não está contido em nenhum outro atlas estritamente maior que ele, isto é se \mathcal{B} for um atlas tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ então $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. E uma **estrutura de variedade** de classe C_r , C^ω ou holomorfa é uma variedade topológica munida de um atlas maximal (C^r , C^ω ou holomorfa).

Definição 3.2. Uma variedade de classe C^r , C^ω ou holomorfa é um par (M, \mathcal{A}) , onde M é uma variedade topológica e \mathcal{A} é um atlas maximal C^r , C^ω ou holomorfa respectivamente.

Ao invés de escrevermos M variedade de dimensão n é comum denotarmos apenas M^n .

Finalizamos com a observação de ao longo do texto sempre que falarmos em variedades estamos supondo C^∞ , com o intuito de facilitar a notação. Tal suposição não é tão restritiva Um resultado garante que sempre posso tomar um sub-atlas de qualquer variedade de modo a torná-la uma variedade

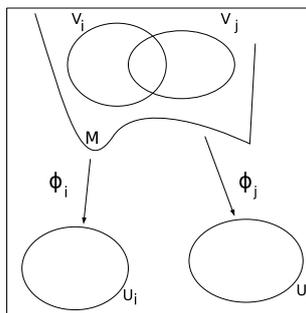


Figura 2: Variedade Diferenciável

C^∞ , confira em [3]. De qualquer maneira os teoremas aqui enunciado em geral se generalizam de maneira óbvia quando consideramos variedades de classe C^r .

maximal, estrutura de variedade.

Na definição de variedades as cartas permitem “fazer cálculo diferencial” nas variedades. Esta idéia se tornará muito mais clara a medida que formos introduzindo algumas definições importantes. Como por exemplo a que segue.

Definição 3.3. Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Dizemos que uma função $f : M \rightarrow N$ é de classe C^k no aberto $\mathcal{U} \subset M$ se dado $p \in \mathcal{U}$ se existem parametrizações ϕ em torno de p e ψ em torno de $f(p)$ tais que $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ é de classe C^k .

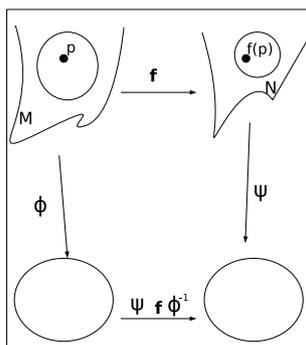


Figura 3: Função em Coordenadas

Mais uma vez fazemos uma ressalva para as variedades complexas. A definição análoga pediria apenas que a função olhada em coordenadas seja holomorfa. Quando se diz, olhar em coordenadas significa trabalhar com $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ e portanto recair o estudo em \mathbb{R}^n .

Portanto uma função

$$f : M \rightarrow N$$

é um **difeomorfismo** se f for uma bijeção, com f e f^{-1} C^∞ .

Observação 3.1. Dada uma variedade C^r então existe uma variedade N real analítica e um difeomorfismo C^r , $f : M \rightarrow N$.

Todo atlas maximal C^r de M contém algum atlas real analítico.

Observação 3.2. Se M é uma variedade topológica de dimensão menor ou igual a 3 então existe uma variedade N suave e um homeomorfismo $f : M \rightarrow N$.

De fato, temos um pouco mais, podemos tomar f um difeomorfismo.

Observação 3.3. John Milnor, provou que existem exatamente 28 estruturas diferenciáveis sobre a esfera S^7 tais que para duas diferentes a esfera S^7 não são difeomorfas. Essas são conhecidas como as **esferas exóticas** de Milnor.

Observação 3.4. Não podemos generalizar a observação 3.2. Isto se deve aos trabalhos de Friedamn e Donaldson, quando a dimensão de M for igual a 4. Friedman utilizou técnicas abordadas neste trabalho, já Donaldson utilizou Equações Diferenciais Parciais.

Se a dimensão de M for diferente de 4 então existem um número finito de estruturas diferenciáveis em M . Se dimensão de M for igual a 4 não é verdade.

Existem infinitos M homeomorfos a \mathbb{R}^4 que não são difeomorfos ao \mathbb{R}^4 .

3.2 Espaço tangente

Introduziremos neste momento um conceito muito importante no estudo de variedades, o espaço tangente. comentários importantes sobre o espaço tangente e passar a idéia intuitiva que se encontra na definição que em um primeiro momento pode parecer pedante.

Definição 3.4. Seja M^m uma variedade e $p \in M$. O espaço tangente, TM_p , de p em M é o conjunto

$$\{\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M, \text{ de classe } C^1 \text{ em zero e } \alpha(0) = p\} / \sim$$

sob a seguinte relação de equivalência: $\alpha \sim \beta$ se suas derivadas em coordenadas coincidem em 0, isto é sendo ϕ uma carta em p tem-se $(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0)$.

ção do espaço tangente se tornava aparentemente mais intuitiva. Tomando uma parametrização do ponto $p \in M$ por ϕ e simplesmente se define $TM_p = D\phi(\mathbb{R}^n)$. E se tornava muito intuitivo ainda mais depois de se

provar que essa relação é equivalente ao de olharmos as curvas que passam por p e considerar o seu vetor velocidade, como pode ser conferido em [6]. O que é possível pois neste caso estamos com $M \subset \mathbb{R}^n$. E tínhamos que $D\phi_p : \mathbb{R}^n \rightarrow TM_p$ era um isomorfismo. E com isso poderíamos sempre “trazer” os vetores do espaço tangente “para baixo”. Tal fato nos fornece uma idéia de definirmos o espaço tangente sem termos que supor que a nossa variedade M esteja contida em algum espaço euclidiano, como é feito na definição acima.

Ainda falta munir TM_p de uma estrutura natural de espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Considere um sistema de carta local $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M em torno de p . Defina

$$d\phi = d\phi(p) : TM_p \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$d\phi([\lambda]) = (\phi \circ \lambda)'(0)$$

por definição de espaço tangente temos que a função $d\phi$ é injetiva. Também temos $d\phi$ sobrejetiva. De fato, dado $v \in \mathbb{R}^m$ seja $\lambda \in TM_p$ (deveríamos escrever $[\lambda]$ mas fica bem entendido quando trabalhamos com apenas um representante da classe de equivalência) definida por $\lambda(t) = \phi^{-1}[\phi(p) + tv]$. Então claro que $d\phi(\lambda) = (\phi \circ \lambda)'(0) = v$ como queríamos.

Estamos aptos a dar uma estrutura de espaço vetorial a TM_p . A idéia é tão natural quanto deveria ser. Para somar ou multiplicar vetores no espaço tangente o mesmo deve acontecer quando o “trazemos” para baixo por $d\phi$. O único detalhe é checar que está bem definido, ou seja somando em cima continua dando o mesmo valor se somarmos em baixo mas aos olhos de $d\psi$ sendo ψ outra carta em torno de p . Definimos em TM_p as operações de espaço vetorial. Sendo $[\lambda], [\mu] \in TM_p$ e $c \in \mathbb{R}$

$$[\lambda] + [\mu] = (d\phi)^{-1}(d\phi([\lambda]) + d\phi([\mu])),$$

$$c \cdot [\lambda] = d\phi^{-1}(c \cdot d\phi([\lambda]))$$

Sendo ψ outra carta local em torno de p temos que $d\psi = (\psi \circ \phi^{-1})' \circ d\phi : TM_p \rightarrow \mathbb{R}^m$ e a comutatividade do diagrama abaixo esclarece o porque da boa definição de estrutura de espaço vetorial em TM_p .

$$\begin{array}{ccc} & TM_p & \\ d\phi \swarrow & & \searrow d\psi \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{(\psi \circ \phi^{-1})'} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Completando a discussão de espaço tangente devemos falar sobre a derivada de uma aplicação diferenciável. Sejam M e N variedades e $f : M \rightarrow N$ suave em $p \in M$. A **derivada** de f em p é a transformação linear $f'(p) : TM_p \rightarrow TN_{f(p)}$ que associa a cada $v = [\lambda] \in TM_p$ o elemento $f'(p) \cdot v = (f \circ \lambda)'(0) \in TN_{f(p)}$

Segue da definição que vale a regra da cadeia. Sejam M, N, P variedades $f : M \rightarrow N$ suave em p e $g : N \rightarrow P$ suave em $f(p) \in N$. Então $g \circ f : M \rightarrow P$ e vale $(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \circ f'(p) : TM_p \rightarrow TP_{g \circ f(p)}$.

Não existência de derivada de ordem superior

Fizemos a definição da derivada de uma função f definida em uma variedade, mas vejamos que não é possível se definir derivadas de ordem superior. Se fosse possível definir de ordem superior estaria definida a de segunda ordem e esta satisfazendo $(D^{(2)}f)_p : TM_p \times TM_p \rightarrow TN_{f(p)}$ bilinear simétrica. Seja ϕ uma parametrização em torno de p , portanto olhando a derivada em cartas deveríamos ter a boa definição da segunda derivada. Defina $g = f \circ \phi$, e portanto olhando em cartas deveríamos ter

$$D^2g(x)(v, w) = D^2f(\phi(x))(D\phi(x)v, D\phi(x)w)$$

No entanto, como $Dg(x) = Df(\phi(x))D\phi(x)$ deveríamos ter pela regra da cadeia que

$$D^2g(x)(v, w) = D^2f(\phi(x))(D\phi(x)v, D\phi(x)w) + Df(\phi(x))D^2\phi(v, w)$$

No entanto este segundo termo deveria ser zero para que pudéssemos definir intrinsecamente a segunda derivada. Logo a segunda derivada ficou dependendo da carta o que portanto torna impossível a sua definição. É possível portanto se definir a segunda derivada de f nos pontos em que sua derivada se anula.

3.3 Subvariedade

Definimos nesta seção o que é uma subvariedade, no entanto não faremos isto de maneira arbitrária apenas considerando como um subconjunto que seja uma variedade, por isso introduzimos algumas definições.

Definição 3.5. Seja $f : M^m \rightarrow N^n$, M e N variedades.

- Dizemos que f é uma *imersão* se a Df_x é injetiva para todo $x \in M$.
- Dizemos que f é uma *submersão* se Df_x é sobrejetiva para todo $x \in M$.
- Dizemos que f é um *mergulho* se for imersão e homeomorfismo (da imagem) com a topologia induzida na imagem.

Algumas variedades estão “naturalmente” colocadas em outras variedades. Para estas variedades daremos o nome de subvariedades. A formalização do conceito segue abaixo.

Definição 3.6. Uma subvariedade M^m é uma *subvariedade* de uma variedade N^n se $M \in N$, e a aplicação inclusão $i : M \rightarrow N$ é um mergulho.

Alguns livros como por exemplo em [2] subvariedade é apenas uma variedade contida em outra. Queremos restringir um pouco mais a definição para não termos certas patologias. Considere o gráfico da função $\sin(\frac{1}{x})$ em $(0, \infty)$ unido com o eixo $x = 0$. é uma variedade de dimensão 1, mas não é uma subvariedade de \mathbb{R}^2 pela nossa definição. Vejamos o porque. Não existe nenhuma vizinhança (na topologia induzida) do ponto $(0, 0)$ que seja conexo por caminhos.

Teorema 3.7. *Seja N^n uma variedade. Para que um subconjunto $M \subset N$ seja uma subvariedade de dimensão m de N é necessário e suficiente que, para cada $p \in M$, exista em aberto $V \subset N$, $p \in V$, e um difeomorfismo $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ tal que $y(M \cap V) \subset \mathbb{R}^m \times 0$.*

Demonstração. Conferir [10] página 155. Compare também com a definição de subvariedade em [3]. □

Na seção 5.1 será provado alguns teoremas relacionados aos conceitos de imersão e mergulho. Por exemplo será mostrado um teorema sobre **existência de mergulhos** e outro sobre **densidade de imersões**. Quanto a subvariedades a próxima subseção contém mais informações.

3.4 Exemplos

Exemplo 3.8. Provemos que a **esfera** S^n é de fato uma variedade n dimensional. Cubramos S^n com os dois tipo de conjuntos a seguir. $U_i = \{x \in S^n \mid x_i > 0\}$ e $V_i = \{x \in S^n \mid x_i < 0\}$ com $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$. É claro que esses conjuntos formam uma cobertura aberta de S^n . Definimos as seguintes cartas nestes conjuntos, $\phi_{U_i} : U_i \rightarrow B(1)\mathbb{R}^n$, $\phi_{U_i}(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$ analogamente $\phi_{V_i}(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$ é fácil ver que de fatos essas funções são cartas locais de S^n . Poderíamos também utilizar a projeção estereográfica (vide [6]). Apesar de ainda não termos falado de valor regular, confira na subseção 3.5 mais a frente, temos que $S^n = f^{-1}(1)$ onde $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$ com 1 sendo valor regular.

Exemplo 3.9. Um outro exemplo importante é conhecido como **espaço real projetivo**, \mathbb{P}^n . Considere a seguinte relação de equivalência \sim em S^n , $x \sim y$ se e somente se $x = y$ ou $x = -y$. Definimos então $\mathbb{P}^n = S^n / \sim$. Indiquemos por $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ a projeção natural, isto é $\pi(x) = [x]$. Munimos \mathbb{P}^n da topologia quociente dado pela projeção natural. É fácil ver que todo ponto $p \in \mathbb{P}^n$ possui uma vizinhança aberta V cuja imagem inversa pela projeção natural possui duas componentes conexas, sendo cada uma aplicada

homeomorficamente sobre V . Tomemos o aberto $U_i = \{[x] \mid x_i \neq 0\}$ de \mathbb{P}^n . Definimos as cartas por

$$\begin{aligned} \phi_i : U_i &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ [x_1, \dots, x_{n+1}] &\longmapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right) \end{aligned}$$

É fácil ver que são homeomorfismo e que as mudanças de cartas são dadas por $\phi_j \circ \phi_i^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (\frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{1}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j})$. Que é de fato anático, em particular satisfaz o que queríamos de ser suave.

Exemplo 3.10. Analogamente podemos definir o **espaço projetivo complexo** $\mathbb{C}P^n$. Definimos sobre a esfera S^n , só que agora a esfera complexa, a relação de equivalência, $x \sim y$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ de normal um ($|\lambda| = 1$) tal que $x = \lambda y$. Assim, $\mathbb{C}P^n$ será uma variedade complexa de dimensão n .

Exemplo 3.11. Também definimos o **espaço projetivo quaterniônico**, $\mathbb{H}P^n$ mais uma vez definido por analogia. Observamos apenas que os quatérnios são o conjunto da forma $t + xi + yj + zk$. A multiplicação quaterniônica fica bem definida por bilinearidade de acordo com as seguintes relações.

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 ; ij = -ji = k ; jk = -kj = i ; ki = -ik = j$$

$$1.i = i.1 = 1 ; 1.j = j.1 = j ; 1.k = k.1 = k.$$

Todo quatérnio não nulo w possui um inverso multiplicativo. Se $w = t + xi + yj + zk$ definimos o conjugado $\bar{w} = t - xi - yj - zk$. Assim $w^{-1} = \frac{\bar{w}}{|w|^2}$

Exemplo 3.12. Estudemos agora a **variedade de Grassman**. Definimos $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ como o conjunto de todas os k -planos (isto é subespaços de dimensão k). Por questões de conveniência definiremos um atlas neste conjunto formado por parametrizações ao invés de cartas, o que dá no mesmo. Considere o par $\alpha = (E, F)$, E e F subespaços de \mathbb{R}^{n+r} com $\dim E = r$ e $E \oplus F = \mathbb{R}^{n+r}$. O conjunto $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ assim definido está munido da topologia quociente, considere portanto o seguinte aberto $U_\alpha \subset G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ o conjunto de todos os $H \in G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ tais que $H \cup F = \{0\}$. Portanto considerando a projeção $\pi_E : E \oplus F \rightarrow E$ leva H isomorficamente sobre E . Assim definimos o seguinte sistema de coordenadas

$$x_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$$

$$x_\alpha(H) = \pi_F \circ (\pi_E)^{-1} : E \rightarrow F$$

O que está acontecendo é que $x_\alpha(H)$ é de fato a transformação linear de E em F cujo gráfico é H . Precisariamos checar que a mudança de coordenadas é uma função suave. Sejam $\alpha = (E, F)$ e $\alpha' = (E', F')$ a mudança de coordenadas $x_{\alpha'} \circ x_\alpha^{-1} : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}(E', F')$ leva uma transformação linear

$u = x_\alpha(H) \in \mathcal{L}(E, F)$ na transformação $u' = x_{\alpha'}(H) \in \mathcal{L}(E', F')$ da seguinte forma. Seja $\tilde{u}: E \rightarrow E \oplus F$ definida por $\tilde{u}(x) = x + u(x)$, que portanto tem H como imagem. Temos que $\pi_{E'} \circ \tilde{u}: E \rightarrow E'$ é um isomorfismo e assim $u' = (x_{\alpha'} \circ x_\alpha^{-1})(u)$ é dada $u' = \pi_{E'} \circ \tilde{u} \circ (\pi_{E'} \circ \tilde{u})^{-1}$ mostrando assim a suavidade da mudança de coordenadas.

Aproveitamos para comentar que poderíamos definir uma outra variedade muito análoga a variedade de grassman como sendo $\tilde{G}_r(\mathbb{R}^{n+r})$ como sendo o conjunto dos k -planos orientados de \mathbb{R}^{n+r} . O que acontece é que de fato temos $\tilde{G}_r(\mathbb{R}^{n+r}) = \{(x, \mathcal{O}_x) \mid \mathcal{O}_x \text{ é uma orientação o } k\text{-plano } x \text{ como veremos na seção 3.7 esta variedade é de fato um recobrimento duplo orientado de } G_r(\mathbb{R}^{n+r})$

Exemplo 3.13. Variedade bandeira (flag manifolds) é uma generalização da Grassman. Dada uma seqüência de k números naturais $0 < n_1 < \dots < n_k$ então a variedade bandeira é a coleção dos conjuntos ordenados de subespaços de \mathbb{R}^{n_k}

$$(V_1, \dots, V_k)$$

tais que a dimensão do espaço vetorial V_i é n_i e $V_i \subset V_{i+1}$.

Tomando $k = 2$ recaímos no grassmanniano.

Variedades Holomorfas

Este trabalho trata primordialmente de variedade reais por isso aproveitamos fazer alguns comentários sobre as variedades holomorfas com o intuito de mostrar um pouco da riqueza do assunto. Abordaremos alguns assuntos que de fato serão tratados mais a frente no texto, entretanto para que os comentários não se tornassem esparsos e sem efeito se colocados ao longo do texto, preferimos fazê-los todos neste momento.

para fazer alguns comentários sobre as variedades holomorfas. Abordaremos alguns assuntos que de fato serão tratados mais a frente no texto, entretanto para que os comentários não se tornassem esparsos e sem efeito se colocados ao longo do texto, preferimos fazê-los todos neste momento.

Proposição 3.1. *Não existe variedade holomorfa $M \subset \mathbb{C}^n$. (Considerando M espaço topológico com a topologia induzida.)*

Demonstração. Suponha por absurdo que seja possível. Considere a seguinte função

$$\begin{aligned} \pi_i: M &\rightarrow \mathbb{C} \\ (z_1, \dots, z_n) &\mapsto z_i \end{aligned}$$

Claro que π_i é uma função holomorfa, e pelo princípio do máximo para funções holomorfas, como M é compacto temos que π_i é constante. Como vale para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Temos que M fica reduzida a um ponto, absurdo. \square

Isto quer dizer que não existe um teorema análogo ao Teorema 5.7 para variedades holomorfas. Para o próximo resultado utilizaremos o conceito de orientabilidade de uma variedade, introduzido na seção 3.7.

Proposição 3.2. *Toda variedade holomorfa é orientável.*

Demonstração. Considere o biholomorfismo (mudança de coordenadas) $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ onde \mathcal{U} e \mathcal{V} são abertos de \mathbb{C}^n . Como queremos ver que a variedade é orientável estamos de fato olhando \mathcal{U} , \mathcal{V} como abertos de \mathbb{R}^{2n} , com a identificação canônica entre \mathbb{C} e \mathbb{R}^{2n} . Como Df é uma matriz complexa sempre tem autovalor (polinômio característico sempre tem raiz), denotemos por $\lambda = a + ib$, chamemos de \tilde{f} à f quando vista como função real. Portanto $D\tilde{f}$ possui um subespaço dois invariantes que corresponde ao span de v_λ que é o autovetor complexo mas aqui olhado como dois vetores reais. Repetindo este processo quantas vezes forem necessário obtemos que $D\tilde{f}$ pode ser escrita, na base proveniente dos v_λ como blocos diagonais da forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & & & & \\ b_1 & a_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & a_n & -b_n & \\ & & & b_n & a_n & \end{pmatrix}$$

Cujo determinante é o número positivo

$$(a_1^2 + b_1^2) \times \dots \times (a_n^2 + b_n^2)$$

Provando o que queríamos. □

O que foi observado na demonstração acima implica também que na seção 7 quando for definido o sinal de uma ponto que está na imagem inversa de um valor regular este sinal como será visto a diante é +1 ou -1 no entanto no caso complexo só pode ser +1.

Lembramos que um polinômio homogêneo de grau d é tal que $P(az_0, \dots, az_n) = a^d P(z_0, \dots, z_n)$. Assim dizemos que M é uma **variedade algébrica** se ela for o conjunto de zeros simultâneos de uma família de polinômios homogêneos em \mathbb{C} . As variedades algébricas são subvariedades holomorfas compactas de $\mathbb{C}P^n$. Vimos que tratando de variedades compactas holomorfas \mathbb{C}^n não é o lugar natural de procurá-las mas sim o espaço projetivo complexo.

Uma variedade holomorfa de dimensão um é chamada de **Superfície de Riemann**. Para um melhor entendimento das Superfícies de Riemann é necessário o estudo do teorema de Riemann-Roch. Um resultado importante que se prova é que toda Superfície de Riemann compacta pode ser mergulhar no espaço projetivo $\mathbb{C}P^3$

3.5 Valor Regular

Depois de estudarmos o conceito de valor regular seremos capazes de criar algumas variedades de forma muito mais fácil, de fato sendo imagem inversa de um certo valor (regular). Mais a frente estenderemos a idéia de valor regular, chamada agora de transversalidade, vide seção 5.1.

Definição 3.14. Dizemos que y é valor regular de uma função suave, f , entre as variedades M^m, N^{m-n} se para todo $x \in f^{-1}(y)$ tivermos que Df_x é sobrejetiva.

Um dos teoremas mais importantes relacionados a valor regular segue abaixo.

Teorema 3.15. Se y é valor regular de uma função $f : M^m \rightarrow N^{m-n}$ então $f^{-1}(y)$ é subvariedade de dimensão n . Em cada ponto $p \in f^{-1}(y)$ o espaço tangente $T[f^{-1}(y)]_p$ é o núcleo da derivada $f'(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$

Demonstração. Para provar o teorema podemos olhar em vizinhanças com isso podemos olhar f em coordenadas e com isso o problema é passado para o espaço euclidiano, com isso posso supor as variedades em algum espaço euclidiano. Assim, pelo teorema da aplicação implícita, para cada ponto $p \in f^{-1}(y)$ existe um aberto Z contendo p tal que $Z \cap f^{-1}(y)$ é o gráfico de uma função suave.

Seja $\lambda \in T(f^{-1}(y))_p$ então claro que $Df(p).\lambda = 0$, assim o espaço tangente está no núcleo de $Df(p)$ e como ambos tem a mesma dimensão fica provado. \square

Podemos assim dar uma aplicação interessante que é provar que **grupo ortogonal** é uma variedade. Considere a função

$$f : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$$

$$f(X) = XX^T$$

sendo que $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ é olhado como sendo o conjunto das matrizes simétricas. Para toda $X \in \mathbb{R}^{n^2}$, a derivada $Df(X)V = XV^T + VX^T$, o grupo ortogonal $O(n) = f^{-1}(I)$. Queremos ver que a derivada é sobrejetiva, ou seja dado S nas simétricas basta pegar a seguinte $V = SX/2$. Com isso temos que $O(n)$ é uma variedade de dimensão $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$ em \mathbb{R}^{n^2} . O teorema ainda nos fornece como achar o espaço tangente a identidade, que é portanto dado por $TO(n)_{Id} = \{V \in \mathbb{R}^{n^2} \mid V + V^T = 0\}$.

3.6 Variedade com bordo

A definição que demos de variedade não inclui por exemplo as bolas fechadas em \mathbb{R}^n . Portanto se faz necessário uma pequena generalização da definição

de variedade para incluir com isso conjuntos importantes como as bolas fechadas e os toros sólidos, isto apenas para citar alguns. Chamemos de \mathbb{H}^\times ao semi-espço superior do \mathbb{R}^n , todavia quando não houver confusão chamaremos apenas de \mathbb{H} . Mais explicitamente,

$$\mathbb{H} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$$

Definição 3.16. Um espço topológico M segundo contável, hausdorff é uma superfície com bordo se existe uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ de M e homeomorfismos (cartas locais) $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ onde V_i é um aberto de \mathbb{H} e as mudanças de coordenadas são difeomorfismos.

O bordo de \mathbb{H} é definido como sendo $\partial\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{n+1} = 0\}$. Com isso o bordo de um aberto $A \subset \mathbb{H}$ é definido como sendo $\partial A = A \cap \partial\mathbb{H}$. E definimos o **bordo de M** por $\partial M = \{p \in M \mid \exists \phi_i \text{ com } p = \phi_i^{-1}(x) \text{ onde } x \in \partial V_i\}$.

A proposição a seguir é importante para que a definição de bordo de uma variedade dada acima esteja bem definida.

Proposição 3.3. *Sejam $A \subset H$, e $B \subset K$ abertos em semi-espços de \mathbb{R}^n . Se $f : A \rightarrow B$ é um difeomorfismo de classe C^1 então $f(\partial A) = \partial B$. Em particular, a restrição $f|_{\partial A}$ é um difeomorfismo entre as hiperfícies ∂A e ∂B .*

Demonstração. Seja $x \in \text{int}.A$, com isso temos que existe $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto tal que $x \in U \subset A$. Restrito a U , f é um difeomorfismo sobre a sua imagem e que pelo teorema da função inversa é um aberto e como $f(U) \subset B$ temos que $f(x)$ está no interior de B . Obtemos portanto $f(\text{int}.A) \subset \text{int}.B$ e assim $f^{-1}(\partial B) \subset \partial A$. Repete-se os cálculos para f^{-1} e chega-se ao que queríamos provar. \square

Vejamos uma maneira simples de se construir variedades com bordo.

Lema 3.1. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $c \in \mathbb{R}$ tem-se $f^{-1}((-\infty, c])$ compacto. Se c for um valor regular de f então $f^{-1}((-\infty, c])$ é uma variedade compacta cujo bordo é $f^{-1}(c)$.*

Demonstração. Lembrar que $f^{-1}(c)$ é subvariedade como já visto. \square

Sabemos que podemos cobrir uma variedade por compactos encaixados. Vejamos como podemos melhorar este resultado.

Proposição 3.4. *Se M é uma variedade não compacta então existe uma seqüência $N_i \subset M$ de variedades compactas com bordo tais que $N_i \subset \text{int}.N_{i+1}$.*

Demonstração. Considere $\{U_i\}$ cobertura localmente finita de M e seja $\{\phi_i\}$ uma partição da unidade subordinada a esta cobertura. Definimos

$$\psi : M \rightarrow (0, 1), \quad \psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \phi_i(x)$$

Não é difícil ver que ψ satisfaz a propriedade do lema acima. Considere $M = \cup K_i$, com K_i compacto e $K_i \subset \text{int}.K_{i+1}$. Seja $a_i = \sup\{\psi(K_i)\}$, como os compactos K_i cobrem M podemos supor que $a_{i+1} > a_i$, caso contrário passamos a uma subsequência. Seja η_i um valor regular tal que $a_{i+1} > \eta_i > a_i$.

Terminamos a prova tomando $N_i = \psi^{-1}((0, \eta_i])$. □

3.7 Orientação

Introduzimos agora o conceito de orientação em uma variedade. Este conceito como veremos mais a frente se faz necessário para definirmos alguns invariantes homotópicos sobre uma variedade.

Definição 3.17. Dizemos que uma variedade M é uma superfície orientável se podemos definir em cada espaço tangente TM_p de M uma orientação para o espaço tangente de forma contínua.

OBS: A continuidade da orientação é definida como segue. Considere ϕ uma carta local definida em um conjunto conexo. Mandando a orientação da base do espaço tangente pela $D\phi$ obtemos sempre a mesma orientação em \mathbb{R}^n .

A próxima proposição é muitas vezes tomada como a definição de variedade orientável.

Proposição 3.5. *Uma variedade M é orientável se, e somente se existe uma cobertura aberta de M por cartas locais tais que as mudanças de coordenadas tem jacobiano positivo.*

Demonstração. (\Rightarrow): Seja $\mathcal{A} = \{\phi_i | \phi_i \text{ leva a base positiva do espaço tangente na orientação positiva do } \mathbb{R}^n\}$. É fácil ver que \mathcal{A} é um atlas pois dado qualquer ponto considere uma carta local definida em um conexo e caso inverta a orientação basta considerar a carta local composta com um difeomorfismo que inverte a orientação no \mathbb{R}^n . E para checar que o jacobiano é positivo basta ver que as derivadas levam base positivas em base positivas, o que acontece por construção do atlas \mathcal{A} .

(\Leftarrow): Basta definirmos a orientação no espaço tangente levando pela parametrização a orientação positiva de \mathbb{R}^n . Que fica bem definido pois o jacobiano é positivo. \square

É comum chamar o atlas descrito na demonstração de *atlas positivo ou atlas coerente*. Muitos livros definem orientação como possuindo uma atlas positivo, como por exemplo em [10].

Se a Faixa de Mobius fosse orientável poderíamos definir um campo normal contínuo na Faixa de Mobius da seguinte forma, tome um atlas positivo e considere o produto vetorial dos vetores de uma base positiva do espaço tangente, por exemplo proveniente de uma parametrização e normal igual a 1. Com isso fica bem definido um campo contínuo sobre a Faixa de Mobius, todavia sabemos que isso não é possível, ao caminharmos sobre o círculo central da Faixa de Mobius com um vetor normal ele retornará com a posição invertida. Tal fato é esclarecido pela proposição a seguir.

Proposição 3.6. *Se uma superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$ admite $n-m$ campos contínuos de vetores normais $v_1, \dots, v_{n-m} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ linearmente independentes em cada ponto $p \in M$ então M é orientável.*

Demonstração. Construamos um atlas positivo. Seja \mathcal{A} o conjunto das parametrizações $\phi : U \rightarrow V$, em M com U conexo e para todo $x \in U$ a matriz $n \times n$

$$\Phi(x) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(x), v_1(\phi(x)), \dots, v_{n-m}(\phi(x)) \right]$$

tem determinante positivo.

Por construção estas parametrizações daram mudanças de coordenadas com jacobiano positivo. E com isso o resultado segue da Proposição 3.5. \square

Proposição 3.7. *Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ compacta então M é orientável.*

Demonstração. Usemos o fato de que toda hiperfície compacta M^m conexa separa o \mathbb{R}^{m+1} em duas componentes conexas. Podemos então definir um campo normal a superfície da seguinte forma. Tome uma parametrização qualquer considere o produto vetorial de m vetores l.i. da espaço tangente, normalize o vetor e coloque na direção da componente conexa ilimitada de M^c . Com isto este campo fica bem definido e segue o resultado segue da proposição acima. \square

O fato utilizado acima, de que toda hiperfície compacta separa o espaço euclidiano é conhecido como *Teorema de Jordan-Brouwer* e pode ser encontrado em [5] página 84.

Poderíamos nos perguntar se o espaço projetivo real é ou não orientável. Não é difícil ver que o jacobiano da função antípoda $\alpha : S^n \rightarrow S^n$ é igual a $(-1)^{n+1}$. Dizemos que uma função preserva orientação se sua derivada preserva orientação. Com isso fica claro o lema abaixo.

Lema 3.2. *A função antípoda preserva orientação se, e somente se n é ímpar.*

Demonstração. Comentada acima. \square

Esta fato simples é de extrema utilidade para provarmos o seguinte resultado.

Proposição 3.8. *O espaço real projetivo é orientável se, e somente se n é ímpar.*

Demonstração. Considere o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{\alpha} & S^n \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi \\ & \mathbb{P}^n & \end{array}$$

Onde π é a projeção canônica. Ou seja $\pi \circ \alpha = \pi$. Sabemos que π é localmente um difeomorfismo, então poderíamos induzir uma orientação em $T\mathbb{P}^n_x$ decretando a orientação positiva como sendo a orientação que provém de uma base positiva de TS^n_x enviada por $D\pi_x$. Só que a orientação poderia não está bem definida. Precisamos chegar que $D\pi_{-x}$ levará a base positiva em uma base que seja a que definimos inicialmente como positiva.

No entanto a relação $\pi \circ \alpha = \pi$ mostra que isso é possível se e somente se α preserva orientação. Mas sabemos que isso acontece se e somente se n for ímpar. E fica demonstrado assim a proposição. \square

Esta proposição de fato nos inspira a formular o seguinte teorema.

Teorema 3.18. *Sejam $f : M \rightarrow N$ um difeomorfismo local sobrejetivo, definido numa variedade orientada conexa. Para que N seja orientável, é necessário e suficiente que, dados quaisquer $x, y \in M$ com $f(x) = f(y)$, o isomorfismo linear $f'(y)^{-1} \circ f'(x) : TM_x \rightarrow TM_y$ seja positivo.*

Demonstração. A prova é exatamente repetindo as idéias da proposição acima. Fazendo a observação de que o isomorfismo linear $f'(y)^{-1} \circ f'(x) : TM_x \rightarrow TM_y$ seja positivo tem o mesmo significado de que para dois pontos mandados para um mesmo ponto fique bem definida a orientação. \square

Estudamos algumas propriedades sobre variedades orientadas sempre observando a sua importância. O que pode de certa forma aparentar um certo desprezo com as variedades que não podem ser orientadas. Isto não é verdade, e a seguir fazemos uma exposição de como “tratar” as variedades não orientáveis.

3.7.1 Recobrimento Duplo Orientável

Como já observamos acima existem variedades não orientáveis, todavia veremos que toda superfície não orientável pode ser recoberta por uma superfície orientável.

Definição 3.19. Um *recobrimento duplo orientado* é uma aplicação $p : \widetilde{M} \rightarrow M$, com as seguintes propriedades:

- M é uma variedade conexa, \widetilde{M} é uma variedade orientada e p é um difeomorfismo local;
- Para cada $y \in M$, a imagem inversa $p^{-1}(y)$ contém exatamente dois;
- Se $p(x_1) = p(x_2)$, com $x_1 \neq x_2$ então o isomorfismo linear $p'(x_2)^{-1} \circ p'(x_1) : T\widetilde{M}_{x_1} \rightarrow T\widetilde{M}_{x_2}$ inverte orientação.

Dizemos que um recobrimento duplo orientado é trivial quando $\widetilde{M} = \widetilde{M}_1 \cup \widetilde{M}_2$ é uma reunião disjunta de dois subconjuntos abertos, cada um dos quais se aplica difeomorficamente sobre M .

Proposição 3.9. *Seja $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ um recobrimento duplo orientado. As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. M é orientável;
2. \widetilde{M} é desconexa;

3. O recobrimento $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ é trivial.

Demonstração. 1 O Teorema 3.18 nos fornece a primeira implicação, que $1) \Rightarrow 2)$. Para provar que $2) \Rightarrow 3)$, tome uma componente conexa C de \widetilde{M} . Sendo p um difeomorfismo local próprio a imagem $P(C)$ é aberta e fechada em M com isso tem-se $p(C) = M$. Como p é um recobrimento duplo orientado então teremos que de fato $\widetilde{M} = \widetilde{M}_1 \cup \widetilde{M}_2$. Pode-se ver que de fato teremos p um recobrimento trivial. A última implicação também é simples. \square

Finalizamos a seção com o teorema principal.

Proposição 3.10. *Toda variedade conexa M possui um recobrimento duplo orientado.*

Demonstração. Basta definirmos o conjunto \widetilde{M} como sendo o conjunto dos pares ordenados (x, \mathcal{O}_x) , sendo \mathcal{O}_x é uma orientação do espaço tangente TM_x . E definimos a projeção $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ por $p(x, \mathcal{O}_x) = x$. \square

3.8 Partições da Unidade

Como já se tornou claro, trabalhar com variedade é trabalhar localmente. No entanto isto pode gerar um problema de extensão. Um objeto definido na variedade é visualizado em coordenadas, mas e se quisermos fazer o contrário definir algum objeto sobre a variedade. Em certo sentido como podemos definir as coisas apenas localmente teremos problema para fazer o objeto bem definido sobre toda a variedade. Para este tipo de problema que estudamos as partições da unidade.

Primeiramente vejamos que podemos definir uma função $\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ suave tal que $0 \leq \xi(x) \leq 1$ para todo x e $\xi|_{B[1]} = 1$ e $\xi(x) = 0$ se $x \notin B[2]$ e quando $1 < |x| < 2$ tem-se $0 < \xi(x) < 1$.

Para a construção da função ξ faremos uma exposição um pouco direta, sem gráficos, todavia matematicamente correta. É sabido dos cursos básicos de análise que a função $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha(t) = 0$ se $t \leq 0$ e $\alpha(t) = \exp(-1/t)$ se $t > 0$ é uma função suave. Definimos agora $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ colocando $\beta(t) = \alpha(t+2) \cdot \alpha(-1-t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Claro que β também é suave. Seja $b = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(t) dt = \int_{-2}^{-1} \beta(t) dt$. Definimos agora a seguinte função $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suave, definida por $\gamma(t) = \beta(t)/b$ se $t \leq 0$ e $\gamma(t) = \beta(-t)/b$ se $t > 0$. Seja $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave definida por $\delta(t) = \int_{-\infty}^t \gamma(s) ds = \int_{-2}^t \gamma(s) ds$. Por fim a função ξ procurada é definida por

$$\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } \xi(x) = \delta(|x|)$$

Sendo ξ constante em torno de zero vemos que de fato ξ é suave.

Para usarmos a função ξ acima para atingirmos o nosso objetivo fazemos a seguinte observação que não deveria ser de difícil visualização. Dado $p \in A \subset M$ onde A é um aberto da variedade M . Existe uma parametrização $\phi : B(3) \rightarrow U$ em M com $\phi(0) = p$ e $U \subset A$.

Uma família $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de uma variedade M diz-se **localmente finita** quando todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança $V \subset M$ que intersecta apenas um número finito de conjuntos C_λ .

Definição 3.20. Seja M uma variedade. Uma partição da unidade em M é uma família de funções $(\phi_\alpha)_{\alpha \in A}$, tais que:

1. Para todos os $p \in M$ e $\alpha \in A$, $\phi_\alpha(p) \geq 0$;
2. A família $(\text{supp}(\phi_\alpha))_{\alpha \in A}$ é localmente finita em M ;
3. Para todo $p \in M$ tem-se $\sum_{\alpha \in A} \phi_\alpha(p) = 1$.

Antes de enunciarmos o teorema principal desta seção vejamos mais uma outra definição. Dizemos que uma partição da unidade $\sum_{\lambda \in L} \xi_\lambda = 1$ é **estritamente subordinada** à cobertura \mathcal{C} quando $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ tem

índices no mesmo conjunto que as funções ξ_λ e, além disso $\text{supp}(\xi_\lambda) \subset C_\lambda$ para todo $\lambda \in L$.

Enunciemos dois resultados conhecidos da topologia que nos auxiliarão na demonstração do próximo teorema.

- Toda variedade M se escreve como reunião enumerável $M = \cup_{i=1}^{\infty} K_i$ de compactos com a seguinte propriedade $K_i \subset \text{int}.K_{i+1}$.
- Toda cobertura aberta \mathcal{C} de uma variedade M pode ser refinada por uma cobertura aberta localmente finita, formada por imagens de parametrizações $\phi : B(3) \rightarrow U$ tais que os abertos do tipo $\phi(B(1))$ ainda cobrem M .

De fato o último resultado é provado utilizando-se o primeiro.

Teorema 3.21. *Dada uma cobertura aberta $\mathcal{C} = (C_\alpha)_{\alpha \in A}$ de uma variedade M , existe uma partição da unidade $\sum_{\alpha \in A} \phi_\alpha = 1$ estritamente subordinada a cobertura \mathcal{C} .*

Demonstração. Considere um refinamento localmente finito $\mathcal{C}' = (U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ da cobertura dada, com $U_i = \phi(B(3))$. Para todo natural i definamos $\xi_i^* : M \rightarrow \mathbb{R}$ associada a ϕ_i da seguinte forma, $\xi_i^*(x) = \xi(\phi^{-1}(x))$ se $x \in \phi_i(B(3))$ e $\phi_i(x) = 0$ caso contrário. Os suportes $\bar{V}_i = \text{supp}.\xi_i^*$ formam uma cobertura localmente finita de M que refina \mathcal{C} . Portanto $\xi^* = \sum \xi_i^*$ é uma função suave positiva em todos os pontos da variedade M .

Definamos $\eta_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ por $\eta_i = \xi_i^*/\xi^*$, claro que $\sum \eta_i = 1$, $\text{supp}.\eta_i = \bar{V}_i$. Com isso obtemos uma partição da unidade, todavia queremos uma partição da unidade que seja estritamente subordinada a cobertura \mathcal{C} . Basta considerar uma função escolha $f : \mathbb{N} \rightarrow L$ escolhemos um índice $\lambda = f(i) \in L$ tal que $\text{supp}\eta_i = \bar{V}_i \subset C_\lambda$. Para cada $\lambda \in L$ definimos $\xi_\lambda = \sum_{f(i)=\lambda} \eta_i$. E

assim obtemos o que queríamos. \square

3.8.1 Aplicações

Métricas Riemannianas

Uma *métrica riemanniana* é uma aplicação que associa a cada ponto p da variedade M um produto interno no espaço tangente TM_p . Se chamarmos de g a uma métrica riemanniana em M iremos denotar por $g_p(\cdot, \cdot)$ para o produto interno definido em TM_p . Assim como quando definimos orientação em uma variedade impomos uma condição de continuidade, para nós também não é interessante que este produto interno varie arbitrariamente ao se percorrer os espaços tangentes. Queremos falar também aqui de algum tipo de continuidade ou diferenciabilidade no caso. Como era de se esperar faremos isso olhando a métrica riemanniana g em coordenadas. Seja

$\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma carta local, olhar g em coordenadas é analisar a seguinte função.

$$g^\phi : \phi(U) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g^\phi(\phi(p); a, b) = g_p(D\phi(p)^{-1}.a, D\phi^{-1}.b)$$

O que deve ser visto com muita naturalidade. Considere agora as seguintes funções $g_{ij}^\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq m$ definidas por $g_{ij}^\phi(p) = g^\phi(\phi(p); e_i, e_j)$. Dizemos portanto que uma métrica riemanniana é suave se as funções g_{ij}^ϕ são suaves.

Teorema 3.22. *É possível definir uma métrica riemanniana em qualquer variedade.*

Demonstração. A idéia é muito simples, definir localmente métricas riemannianas induzidas pela métrica em \mathbb{R}^n e levantá-la a variedade e fazer uma soma com a partição da unidade. \square

De fato esta métrica por construção pode ser tomada como sendo suave. Uma variedade M chama-se uma *variedade riemanniana* se a ela for fornecida uma métrica riemanniana, em geral denotada pelo par (M, g) . O intuito de se colocar esta estrutura em uma variedade é por exemplo de que agora podemos falar de caminhos mais curtos entre dois pontos (geodésicas), discutiremos mais esses assuntos na seção ??

Outras aplicações

Vimos na seção anterior como colocamos uma topologia no espaço $C^r(M, N)$. Comentamos duas formas de muni-lo de uma mesma topologia. De fato podemos ainda olhar uma outra forma e que gera a mesma topologia. Vamos estudar o caso $C^0(M, N)$ onde N é um espaço métrico. Seja $\epsilon : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $f \in C^0(M, N)$ uma vizinhança fundamental de f é da forma $\mathcal{V}(f, \epsilon) = \{g \in C^0(M, N) \mid d(f(x), g(x)) < \epsilon(x), \forall x \in M\}$. Para ver que assim definida, esta topologia coincide com a dada na seção anterior essencialmente se resume a entender o seguinte resultado.

Lema 3.3. *Seja $M = \cup_1^\infty K_i$ onde K_i é compacto e $K_i \subset \text{int}.K_{i+1}$. Seja a_n uma seqüência de números reais positivos. Existem funções f, g positivas e de classe C^∞ tais que*

$$\sup\{f(x) \mid x \in K_{i+1} \setminus K_i\} \leq a_i ; \quad \inf\{g(x), \mid x \in K_{i+1} \setminus K_i\} \geq a_i$$

Demonstração. Façamos o caso do supremo. O outro segue as mesmas idéias. Definamos funções $f_i : K_i \rightarrow (0, \infty)$ indutivamente. Seja $f_1 = a_1$. Seja $\{f_i\}_{i=1}^l$ tal que nos seus respectivos domínios elas satisfazem a propriedade que buscamos para f e tal que $f_i = f_{i-2}$ em K_{i-2} , para $3 \leq i \leq l$. Seja $\mathcal{V} \subset M$ um aberto que contém $K_l \setminus \text{int}.K_l$ e esteja contido em $\text{int}.K_{l+1}$,

seja $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < \min(\inf\{f_l(x) \mid x \in K_l \setminus K_{l-1}\}, a_{l+1})$. Seja $\xi : M \rightarrow [0, 1]$ tal que $\xi = 1$ em $K_l \setminus \mathcal{V}$ e $\xi = 0$ em $K_{l+1} \setminus \mathcal{V} \cup K_l$. A função procurada fica definida como

$$f_{l+1}(x) = \xi(x)f_l(x) + (1 - \xi(x))\alpha$$

Esta construção garante a boa definição da seguinte função

$$f(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x)$$

Fixado o ponto $x \in M$ em um momento este limite permanece constante, e satisfaz a propriedade por construção. \square

Observação: Usa-se partições da unidade para provar a existência da função ξ usada no lema acima.

Proposição 3.11. *Seja X um campo de vetores em M , então existe uma função suave positiva tal que o fluxo do campo $Y(x) = g(x)X(x)$ está definido para todo tempo.*

Demonstração. Cobrimos a variedade M por compactos encaixados ($K_i \subset \text{int}.K_{i+1}$). Olhemos para a faixa $F_i = K_i \setminus \text{int}.K_{i-1}$. Por ser um compacto existe um tempo $t_i > 0$ tal que as órbitas levam pelo menos um tempo t_i para ultrapassarem esta faixa. Sabemos que diminuindo a velocidade do campo aumenta-se o tempo. Podemos cobrir a faixa por uma quantidade finita de vizinhanças coordenadas, olhando em \mathbb{R}^n sabemos que podemos diminuir o campo de tal forma que o fluxo leve pelo menos um tempo 1 para passar por essa vizinhança. Assim existe um número $a_i > 0$ tal que nesta faixa o fluxo de $a_i X$ está definido para pelo menos um tempo 1. Seja f uma função como a descrita no lema acima. Temos que o campo Y procurado pode ser definido como $Y(x) = f(x)X(x)$. \square

3.9 Grupos de Lie

Definição 3.23. Um *Grupo de Lie* é uma variedade G , dotada de uma estrutura de grupo cuja multiplicação $m : G \times G \rightarrow G$, $m(x, y) = xy$, e a inversão $\xi : G \rightarrow G$, $\xi(x) = x^{-1}$ são aplicações C^∞ .

Falaremos um pouco sobre os grupos de Lie pois eles serão usados na seção seguinte. Vejamos que as seguintes funções são difeomorfismo.

$$\begin{cases} L_x : G \rightarrow G, & L_x(y) = xy & (\text{translação à esquerda por } x) \\ R_x : G \rightarrow G, & R_x(y) = xy & (\text{translação à direita por } x) \end{cases}$$

De fato é fácil ver que todas as funções acima definidas são bijeções, e de fato podemos explicitar suas inversas

$$(L_x)^{-1} = L_{x^{-1}} ; (R_x)^{-1} = R_{x^{-1}}$$

Assim para checar que são difeomorfismos, tendo em vista a forma da suas inversa basta checar que são C^∞ . Provemos por exemplo que $L_x \in C^\infty$. A função $j_x : G \rightarrow G \times G$, $j_x(y) = (x, y)$ é um mergulho suave, e como $L_x = m \circ j_x$ segue que $L_x \in C^\infty$.

De particular interesse para muitas aplicações são os **grupos de matrizes** que são subgrupos de $GL(n, \mathbb{R})$ o conjunto das matrizes $n \times n$ invertível com entradas reais, e a operação de produto é a multiplicação e a inversão de matrizes é a inversa.

Seus subgrupos mais importantes são o **grupo ortogonal** $O(n)$, o **grupo especial linear** $SL(n, \mathbb{R})$ e o **grupo ortogonal especial** $S(n)$.

$$O(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) \mid MM^t = M^t M = 1\}$$

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det M = 1\}$$

$$SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$$

A também o análo complexo. $GL(n, \mathbb{C})$ são as matrizes $n \times n$ com entradas complexas invertíveis. Algum de seus principais subgrupos são o **grupo unitário** $U(n)$, o **grupo especial linear** $SL(n, \mathbb{C})$ e o **grupo unitário especial** $SU(n)$.

$$U(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}) \mid MM^\dagger = M^\dagger M = 1\}$$

$$SL(n, \mathbb{C}) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \det M = 1\}$$

$$SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$$

Sendo que neste caso em $U(n)$ o símbolo \dagger significa que estamos considerando o conjugado hermitiano.

De fato todos esses conjuntos são grupos de Lie, segue do resultado

- Todo subgrupo fechado H de um grupo de Lie G é um grupo de Lie.

enunciamos este resultado por completeza mas não o demonstraremos aqui, sendo encontrado em qualquer bom livro sobre grupos de Lie.

Definição 3.24. Seja G um grupo de Lie e M uma variedade. A *ação* de G em M é uma função suave $\sigma : G \times M \rightarrow M$ que satisfaz

i $\sigma(e, p) = p$ para todo $p \in M$;

ii $\sigma(g_1, \sigma(g_2, p)) = \sigma(g_1 g_2, p)$.

OBS: Em geral usa-se a notação gp para $\sigma(g, p)$.

Vejamos alguns exemplos de ações.

Considere um campo de vetores sobre uma variedade M , o fluxo gerado por este campo fornece uma ação de \mathbb{R} em M .

Se $M \in GL(n, \mathbb{R})$ e $x \in \mathbb{R}^n$ então uma ação natural definida de $GL(n, \mathbb{R})$ sobre \mathbb{R}^n é dada por $\sigma(M, x) = M.x$. A ação dos subgrupos de $GL(n, \mathbb{R})$ são definidos de forma análoga. No entanto eles podem atuar em espaços menores, como por exemplo $O(n)$ atua na esfera $n - 1$ dimensional e raio r , $\sigma : O(n) \times S^{n-1}(r) \rightarrow S^{n-1}(r)$.

Definição 3.25. Seja G um grupo de Lie que age sobre uma variedade M por $\sigma : G \times M \rightarrow M$. A ação σ é chamada de

- a) **Transitiva** se, para todo $p_1, p_2 \in M$ existe um elemento $g \in G$ tal que $\sigma(g, p_1) = p_2$;
- b) **Propriamente descontínua** se para todo elemento não trivial $g \neq e$ de G tem-se $\sigma_g : M \rightarrow M$ não tem ponto fixo;
- c) **Efetivo** se $\sigma(g, p) = p$ para todo $p \in M$ então $g = e$.

Sobre o resultado que comentamos acima podemos ver também que o subgrupo de G definido por $H(p) = \{g \in G \mid \sigma(g, p) = p\}$ conhecido como **grupo de isotropia** é um grupo fechado de G logo um grupo de Lie. No caso em que G atua propriamente descontinuamente sobre M temos que $H(p) = e$.

Seja G um grupo de Lie e σ sua ação sobre uma variedade M . Então considera o seguinte conjunto M/\sim sendo a relação de equivalência dada por, $x \sim y$ se, e somente se, existe $g \in G$ tal que $\sigma(g, y) = x$. De fato, M/\sim é uma variedade (Vide [8]).

Exemplo: Considere a variedade produto $\mathbb{R} \times M^m$ sendo M um variedade e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo. Considere a seguinte ação, que age propriamente descontinuamente sobre $\mathbb{R} \times M$.

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times (\mathbb{R} \times M) &\longrightarrow \mathbb{R} \times M \\ (n, (t, x)) &\mapsto (t + n, f^n(x)) \end{aligned}$$

Se a variedade M for um círculo e o difeomorfismo f por a identidade tem-se que M/\sim é o toro. No caso de f ser a reflexão M/\sim se trata da garrafa de Klein.

Dizemos que um campo X de vetores em um grupo de Lie G é **invariante à esquerda** se $(L_g)_*X = X$ para todo $g \in G$ E analogamente dizemos que X é **invariante à direita** se $(R_g)_*X = X$. Com isso campos invariantes ficam completamente determinados ao conhecermos o seu valor para um determinado espaço tangente. Por exemplo, criamos todos os campos invariantes à esquerda da seguinte forma. Seja $X(e)$ um vetor no espaço tangente T_eG , sendo e o elemento neutro do grupo G . Definimos o único campo X invariante à esquerda assumindo o valor $X(e)$ em T_eG como sendo

$$X(g) = D(L_g)_e X(e)$$

Analogamente definimos os campos invariantes à direita

$$X(g) = D(R_g)_e X(e)$$

Proposição 3.12. TG é difeomorfo a $G \times T_e G$

Demonstração. Podemos explicitar o difeomorfismo.

$$\Psi : G \times T_e G \rightarrow TG$$

$$(g, v) = dL_g(v)$$

□

Este simples resultado possui várias implicações. Ainda não definimos alguns conceitos mas para frisar veremos que a proposição acima implica que G é paralelizável (seção 4), orientável (seção 3.7), e tem característica de Euler (seção 8) igual a zero.

Lembramos que

$$L_{g*}[X, Y] = [L_{g*}X, L_{g*}Y]$$

e portanto fazemos a definição a seguir

Definição 3.26. O conjunto dos campos invariantes a esquerda (direita) munidos da operação de colchete de Lie $[\cdot, \cdot]$ é chamado de álgebra de Lie e denotado por \mathfrak{g} .

Definição 3.27. Definimos a função exponencial de G como sendo a função

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$$

$$X \rightarrow X_1(e)$$

onde X_t é o fluxo proveniente do campo invariante X .

Teorema 3.28. A exponencial é um difeomorfismo local de uma vizinhança $e \in \mathfrak{g}$ e $e \in G$.

Definição 3.29. Uma representação de um grupo de Lie é um homomorfismo de grupos

$$\phi : G \rightarrow \text{Aut}(V)$$

onde V é um espaço vetorial.

Onde $\text{Aut}(V)$ são os endomorfismo de V ou seja, aplicações lineares invertíveis.

No caso de grupos de Lie, o conjunto dos automorfismo de G , $\text{Aut}(G)$, é formado pelas transformaçõess $\phi : G \rightarrow G$ que sejam difeomorfismos e isomorfismos de grupo. Ou seja ϕ e ϕ^{-1} são homomorfismos de grupos ($\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1) \phi(g_2)$). Dado $h \in G$ definamos a seguinte função

$$I_g : G \rightarrow G$$

$$g \mapsto hgh^{-1}$$

é um homomorfismo, e um difeomorfismo. Observe que $I_h = R_{h^{-1}} \circ L_h$.

Definição 3.30. A representação adjunta de G é o homomorfismo

$$Ad : G \rightarrow Aut(\mathfrak{g})$$

$$Ad(g) = (dI_g)_e$$

3.10 Assuntos Diversos

Vejam como generalizar, naturalmente, os conceitos e resultados vistos anteriormente nos espaços euclidianos.

Campos de Vetores e Curvas Integrais

Uma campo de vetores X em uma variedade M é uma função que associa a cada $p \in M$ um vetor tangente $X(p) \in T_pM$. E portanto uma curva integral do campo X é uma curva $\gamma(t)$ em M tal que

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t))$$

Vale portanto, pois olhamos em coordenadas, todo os resultados que conhecemos para EDO's em \mathbb{R}^n . Estamos considerando campos suaves, ou seja, tomadado uma parametrização o pull-back de X pela parametrização é um campo suave.

Proposição 3.13. *O Grupo dos difeomorfismo em uma variedade conexa M age transitivamente, isto é, dado $p, q \in M$ existe $f \in Dif(M)$, $f : M \rightarrow M$ tal que $f(p) = q$.*

Demonstração. Dado $p, q \in M$ defina o conjunto

$$\mathcal{A} = \{x \in M \mid \exists f \in Dif(M), f(p) = x\}$$

Basta provarmos portanto que \mathcal{A} é um aberto e fechado em M e portanto $\mathcal{A} = M$ e provamos o que queríamos. Basta observamos que dado um ponto qualquer $y \in M$ então localmente podemos achar um difeomorfismo que leva y a qualquer outro ponto em sua vizinhança. Pois podemos olhar em cartas e assim para levarmos o ponto y a um ponto z considere localmente em torno de y o campo constante $z - y$ e multiplique por uma bump function para que que se anule fora de uma vizinhança e não tenha problema.

Provemos que \mathcal{A} é aberto, e para ver que é fechado é o mesmo raciocínio. Dado $y \in \mathcal{A}$ considere uma vizinhança, \mathcal{V}_y , de y tal que dado $z \in \mathcal{V}_y$ existe difeomorfismo ϕ_z tal que $\phi_z(y) = z$. Seja f o difeomorfismo tal que $f(p) = y$ então $\phi_z \circ f$ é um difeomorfismo que leva p em z e portanto $z \in \mathcal{A}$. \square

Teorema de Stokes

Sejam M uma variedade e $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}$ um atlas. Então uma k -forma diferenciável ω em M é definida como uma família

$$\omega = \{\omega_\alpha\}$$

onde $\omega_\alpha \in \Omega^k(\phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha))$ e satisfazem a condição de compatibilidade, isto é

$$(\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha)^* \omega_\beta = \omega_\alpha$$

Denotamos

$$\Omega^k(M) = \{ \text{k-forma diferenciável em } M \}$$

A propriedade do pull-back nos permiti definir a diferencial exterior de uma forma $\omega \in \Omega^k(M)$ naturalmente como

$$d\omega = \{d\omega_\alpha\}$$

E continuam válidas todas as propriedades antes estabelecidas para as formas definidas em abertos euclidianos.

Teorema 3.31 (Teorema de Stokes). *Sejam $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ de suporte compacto e M uma variedade com bordo k dimensional, então vale*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Teorema de Frobenius

Dado um campo X sobre um variedade M encontramos curvas integrais, ou seja, encontramos uma variedade cujo espaço tangente é gerado por X . O que dizer se estivessemos considerando por exemplo dois campos, X e Y , em que sentido poderíamos falar de curvas integrais? Talvez superfícies tais que o seu espaço tangente seja gerado pelos vetores X e Y . Essencialmente é isso que faremos agora, generalizar a idéia de curva integral

Definição 3.32. Uma distribuição \mathcal{D} r -dimensional na variedade M é uma função que a cada ponto $p \in M$ associa um subespaço r -dimensional do espaço tangente de $T_p M$ de maneira suave.

Definição 3.33. Uma subvariedade $N \subset M$ é uma variedade integral se $T_p N$ é o subespaço da distribuição \mathcal{D} no ponto p . Se uma variedade integral existe em todo ponto de M então dizemos que a distribuição \mathcal{D} é completamente integrável.

Conseqüentemente toda distribuição 1-dimensional é completamente integrável. Dado um campo X em M dizemos que o campo X pertence a distribuição \mathcal{D} se $X(p) \in \mathcal{D}_p$.

Proposição 3.14. *Se X e Y são campos suaves pertencentes a uma distribuição \mathcal{D} completamente integrável, então $[X, Y]$ pertence a \mathcal{D} .*

Uma distribuição é **involutiva** se dado quaisquer dois campos suaves X, Y pertencentes a \mathcal{D} tem-se que $[X, Y]$ pertence a \mathcal{D} .

Teorema 3.34. *(Teorema de Frobenius) Uma distribuição é completamente integrável se e somente se é involutiva.*

ção da unidade.

teorema de Hopf.

comutativa) é C^r se e somente se $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^k, f_j = f_i \circ (\phi_i \circ \phi_j^{-1})$ em $U_i \cap U_j$.

$\mathbb{C}P^1$ difeomorfo a S^2 , espaço projetivo quaterniônico, variedade de Grassman (real e complexa), espaço quociente e variedade bandeira.

do toro, esfera, plano é quociente de D^2 por subgrupos de difeos holomorfos agindo descontinuamente em D^2 , vide apêndice) recobrimento duplo orientável.

ções suaves menores que esses números em compactos e positiva etc variedade compactas com bordo.

4 Fibrados

Nesta seção faremos o estudo de fibrados, terminando na última seção falando sobre a topologia de Whitney. Iniciamos com o fibrado tangente. Seja M uma variedade de dimensão m definimos o **fibrado tangente** como sendo

$$TM = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_p M\}$$

Considere a função projeção $\pi : TM \rightarrow M$ definida por $\pi(p, v) = p$. Vejamos que o fibrado tangente é uma variedade de dimensão $2m$. Um atlas de M induz um atlas em TM da seguinte forma. Seja U_i um aberto de M relacionado a uma carta ϕ_i . Induzimos uma parametrização em $\pi^{-1}(U_i)$ como

$$\begin{aligned} \Psi : \phi(U_i) \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \pi^{-1}(U_i) \\ (x, v) &\mapsto (\phi^{-1}(x), D\phi_x^{-1}v) \end{aligned}$$

Olhamos TM como sendo o espaço topológico gerado pelos abertos de $\phi(U_i) \times \mathbb{R}^m$ enviados pela função Ψ definida acima.

Igualmente importante, temos o **fibrado cotangente**, definido como sendo o conjunto

$$T^*M = \{(p, \xi) \mid p \in M, \xi \in (T_p M)^*\}$$

Seja $\mathcal{U} \subset M$ um aberto coordenada, com parametrização ϕ . Dado $\xi \in (T_p M)^*$ então $\xi = \sum_i \xi_i (d\phi_i)_p$, onde $(d\phi_i)_p$ é o dual do vetor $d\phi^{-1}e_i$, e portanto as funções

$$\begin{aligned} T^*(\mathcal{U}) &\rightarrow \phi(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n \\ (p, \xi) &\mapsto (\phi_1(p), \dots, \phi_n(p), \xi_1, \dots, \xi_n) \end{aligned}$$

são parametrizações para o fibrado cotangente.

4.1 Fibrado Vetorial

Estenderemos a idéia de fibrado tangente com os fibrados vetoriais que são um tipo particular de fibrado. Estaremos primordialmente interessados nos fibrados vetoriais e por isso dedicaremos mais tempo para o seu estudo.

Definição 4.1. Um fibrado vetorial ξ sobre um espaço topológico B consiste de

- espaço topológico E , chamado de **espaço total**,
- um função contínua $\pi : E \rightarrow B$, chamada de **função projeção**,
- para cada $b \in B$, o conjunto $\pi^{-1}(b)$ possui estrutura de espaço vetorial real

Além disso, ξ satisfaz a condição de trivialidade. Dado $b \in B$ existe vizinhança U de b e um homeomorfismo

$$U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{h} \pi^{-1}(U)$$

tal que fixado $x \in U$ temos que $h(x, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(x)$ é um isomorfismo entre espaços vetoriais.

O par (U, h) acima é chamado de **coordenada local** de ξ . Dizemos que ξ é um **fibrado trivial** se podemos escolher U igual à B . O espaço vetorial $\pi^{-1}(b)$ é chamado de **fibra** sobre b . Podemos denotar a fibra sobre b também como F_b ou $F_b(\xi)$. Quando um fibrado for trivial também recebe o nome de **paralelizável**.

Exemplo 4.2.

- a) Um exemplo trivial de fibrado ξ é dado por um espaço topológico qualquer B e construímos a função projeção $\pi : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow B$, que é claramente paralelizável.
- b) Poderíamos nos perguntar, por exemplo, se o fibrado tangente de S^2 é trivial. Suponha que o fibrado tangente de S^2 seja trivial, considere a trivialização $h : S^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow TS^2$, podemos construir o seguinte campo de vetores sobre S^2 não nulo dado por $X(x) = h(x, v)$ onde $v \in \mathbb{R}^2$ qualquer vetor não nulo. Mas isto não pode acontecer como será mostrado na seção 8.

Queremos manipular e comparar fibrados. A primeira definição neste sentido é a

Definição 4.3. Considere os fibrados ξ e η sobre um mesmo espaço base B . Dizemos que o fibrado ξ é isomorfo ao fibrado η se existe um homeomorfismo

$$f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$$

tal que f manda $F_b(\xi)$ isomorficamente ao correspondente espaço vetorial $F_b(\eta)$.

Os campos de vetores sobre uma variedade são um exemplo do que definimos como seção de um fibrado, neste caso do fibrado tangente.

Definição 4.4. Uma seção de um fibrado ξ é uma função $s : B \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s(b) = b$.

Exemplo 4.5. Considere \mathbb{P}^n o espaço projetivo real, seja $E(\gamma_n^1) = \{(\{\pm x\}, \alpha x) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$. Defina a função projeção $\pi : E(\gamma_n^1) \rightarrow \mathbb{P}^n$ por $\pi(\{\pm x\}, v) = \{\pm x\}$. Chequemos a condição de trivialidade para verificarmos que se trata de um fibrado vetorial de fato. Considere um aberto $U \subset \mathbb{P}^n$

que não contenha pontos antípodas quando olhamos “de volta” em S^n pela projeção que induz a topologia quociente. Definimos uma coordenada local de γ_n^1 por

$$h : U \times \mathbb{R} \rightarrow \pi^{-1}(U)$$

$$h(\{\pm x\}, t) = (\{\pm x\}, tx)$$

Veja que foi necessário a escolha de U como acima para que a função h ficasse bem definida. Dizemos que γ_n^1 é o **fibrado canônico de linha sobre \mathbb{P}^n** .

Proposição 4.1. *O fibrado γ_n^1 sobre \mathbb{P}^n não é trivial.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que seja um fibrado trivial. Tomemos a trivialização $h : \mathbb{P}^n \times \mathbb{R} \rightarrow E(\gamma_n^1)$, podemos definir uma seção $s : \mathbb{P}^n \rightarrow E(\gamma_n^1)$ que não se anula em nenhum ponto por $s(\{\pm x\}) = h(\{\pm x\}, 1)$.

Seja $p : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ a projeção canônica e considere a função

$$\psi : S^n \rightarrow E(\gamma_n^1), \quad \psi(x) = p \circ s(x)$$

Portanto, existe uma função contínua $t : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\psi(x) = (\{\pm x\}, t(x))$. Temos $\psi(x) = \psi(-x)$, então $t(-x) = -t(x)$. Queremos ver que existe $x_0 \in S^n$ tal que $t(x_0) = 0$. Se $t(x) \geq 0$ então $t(-x) \leq 0$ e como S^n é conexa a imagem de S^n por t é um intervalo, logo deve conter o zero. Portanto a seção s se anula no ponto x_0 , absurdo. \square

Se um fibrado trivial ξ for isomorfo a um fibrado η então η é trivial. De fato, seja $f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ o homeomorfismo dado pelo isomorfismo dos fibrados. Considere a trivialização $h : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow E(\xi)$ e definimos uma trivialização de η por $\tilde{h} = f \circ h$.

Proposição 4.2. *Sejam ξ e η fibrados vetoriais sobre um mesmo espaço base B com fibra \mathbb{R}^n . Se $f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ for uma função contínua que leva $F_b(\xi)$ isomorficamente a $F_b(\eta)$, então f é um homeomorfismo. Portanto ξ é isomorfo a η .*

Demonstração. Temos que f é injetiva, para ver que f é um homeomorfismo, basta verificarmos que f^{-1} é contínua. Assim como fazemos com variedades fazemos com fibrados, isto é, verificaremos em cartas.

Tome $b_0 \in B$ e escolhamos vizinhanças coordenadas (u, g) de ξ e (V, h) de η onde $b_0 \in U \cap V$. Em coordenadas

$$h^{-1} \circ f \circ g : (U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

queremos verificar que esta função é um homeomorfismo. Fixado $b \in U \cap V$ temos o seguinte isomorfismo $h^{-1} \circ f \circ g(b, x) = (b, y)$, sendo f contínua temos que

$$y_i = \sum_j f_{ij}(b)x_j$$

onde $y = (y_1, \dots, y_n)$ e a matriz $[f_{ij}(b)]$ é invertível e contínua, estas duas propriedades por hipótese sobre f . Denotemos $[F_{ij}(b)]$ como sendo a matriz inversa de $[f_{ij}(b)]$ que depende continuamente de b . A inversa da nossa f em coordenadas é

$$g^{-1} \circ f^{-1} \circ h(b, y) = (b, x), \text{ onde } x_j = \sum_i F_{ji}(b) y_i$$

Esta função é contínua, como queríamos provar. □

Teorema 4.6. *Um fibrado vetorial ξ com fibra \mathbb{R}^n é trivial se e somente se existem s_1, \dots, s_n seções que formam uma base de $\pi^{-1}(b)$ para todo $b \in B$.*

Demonstração. Suponha que ξ seja um fibrado trivial, seja $h : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow E(\xi)$ sua trivialização. Definimos as seções s_i por $s_i(b) = h(b, e_i)$. Logo os s_i assim definidos formam uma base em cada espaço vetorial $\pi^{-1}(b)$ já que $h(b, \cdot)$ é um isomorfismo de \mathbb{R}^n em $\pi^{-1}(b)$.

Façamos a outra implicação. Suponha que existam s_1, \dots, s_n seções que formam uma base nas fibras. Portanto definimos

$$f : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow E(\xi)$$

$$f(b, x) = x_1 s_1(b) + \dots + x_n s_n(b)$$

Segue da proposição acima que ξ é isomorfo ao fibrado trivial ϵ_B^n . □

Operações com Fibrados

fibrados de outros previamente conhecidos.

Considere ξ um fibrado vetorial e B' um subconjunto do espaço base B definimos o **fibrado restrito** a B' , isto é $\xi|_{B'}$, como sendo o fibrado em que o novo espaço base seja B' , o espaço total é dado por $\pi^{-1}(B')$ e a função projeção é dada pela restrição de π a $E(\xi|_{B'})$. E as fibras $F'_b(\xi|_{B'})$ coincidem com $F'_b(\xi)$.

Podemos também fazer o pull-back de fibrados. Considere o fibrado vetorial ξ e sejam B_1 um espaço topológico e $f : B_1 \rightarrow B$ uma função qualquer, podemos definir o **pull-back** do fibrado ξ por f como sendo o fibrado $f^*\xi$ definido da seguinte forma. O espaço base será B_1 , o espaço total é definido como

$$E(f^*\xi) = \{(b, e) \mid f(b) = \pi(e)\} \subset B_1 \times E$$

A função projeção $\pi_1 : E(f^*\xi) \rightarrow B_1$ é dada por $\pi_1(b, e) = b$. Definimos $E_1 := E(f^*\xi)$, para não carregar a notação. O seguinte diagrama comuta onde $\tilde{f}(b, e) = e$.

$$\begin{array}{ccc}
E_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\
\pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\
B_1 & \xrightarrow{f} & B
\end{array}$$

Definimos a estrutura vetorial em $\pi_1^{-1}(b)$ da maneira natural. Assim \tilde{f} leva a fibra $F_b(f^*\xi)$ isomorficamente na fibra $F_{f(b)}(\xi)$. Para checar a condição de trivialidade de $f^*\xi$, considere (U, h) uma vizinhança coordenada do fibrado ξ , defina $U_1 = f^{-1}(U)$ e definimos a vizinhança coordenada (U_1, h_1) de $f^*\xi$ por

$$h_1 : U_1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_1^{-1}(U_1)$$

$$h_1(b, x) = (b, h(f(b), x))$$

É possível mostrar que dado um fibrado ξ e funções $f, g : B_1 \rightarrow B$ homotópicas então os fibrados $f^*\xi$ e $g^*\xi$ são isomorfos.

agora.

Definição 4.7. Sejam ξ e η dois fibrados vetoriais. Um mapa fibrado de η em ξ é uma função contínua

$$g : E(\eta) \rightarrow E(\xi)$$

que leva cada espaço vetorial $F_b(\eta)$ isomorficamente em uma fibra $F_{b'}(\xi)$

Na definição acima, defina a função dos espaços bases $\tilde{g} : B(\eta) \rightarrow B(\xi)$ por $\tilde{g}(b) = b'$.

Proposição 4.3. Se $g : E(\eta) \rightarrow E(\xi)$ é um mapa fibrado e se $\tilde{g} : B(\eta) \rightarrow B(\xi)$, a função dos espaços base como definido acima, então η é isomorfo ao pull-back de ξ por \tilde{g} , isto é $\eta \cong \tilde{g}^*\xi$.

Demonstração. Definimos

$$h : E(\eta) \rightarrow E(\tilde{g}^*\xi)$$

$$h(e) = (\pi(e), g(e))$$

O que segue da proposição 4.2. □

Uma outra maneira natural de se contruir fibrados é pelo **produto cartesiano** de fibrados. Sejam ξ_1 e ξ_2 fibrados, definimos o fibrado $\xi_1 \times \xi_2$, da seguinte forma, sua função projeção é definida como, onde os índice 1 e 2 se referem aos fibrados ξ_1 e ξ_2 respectivamente,

$$\pi_1 \times \pi_2 : E_1 \times E_2 \rightarrow B_1 \times B_2$$

Onde as fibras são $F_{b_1}(\xi_1) \times F_{b_2}(\xi_2)$.

Fibrado Universal

Já estudamos a variedade grassmaniana $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ que é o conjunto dos n planos em \mathbb{R}^{n+k} . Definimos o fibrado canônico $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$ sobre $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ da seguinte forma. O espaço total E será

$$E(\gamma_n^{n+k}) = \{(P, v) \mid P \text{ é um } n\text{-plano}, v \in P\}$$

$$\pi : E \rightarrow G_n(\mathbb{R}^{n+k}), \quad \pi(P, p) = P$$

O fibrado $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$ é também conhecido como fibrado universal. Isto porque em certo sentido ele contém todos os fibrados vetoriais cuja fibra seja um espaço euclidiano.

Teorema 4.8. *Seja ξ um fibrado vetorial com fibra \mathbb{R}^n sobre uma variedade compacta, então existe um mapa fibrado de ξ em $\gamma^n(\mathbb{R}^m)$ para m suficientemente grande.*

Demonstração. Para construirmos um mapa fibrado $f : \xi \rightarrow \gamma^n(\mathbb{R}^m)$ é suficiente construir

$$\tilde{f} : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

que nas fibras $F_b(\xi)$ seja linear e injetiva. E assim podemos encontrar f definindo da seguinte forma

$$f(e) = (\tilde{h}(\pi^{-1}(e)), \tilde{f}(e))$$

Considere U_1, \dots, U_r abertos de B tal que $\xi|_{U_i}$ seja trivial e existam abertos V_1, \dots, V_r que seja cobertura de B e $\overline{V_i} \subset U_i$. E construimos também W_1, \dots, W_r sendo para os V_i o que os V_i são para os U_i . Definimos funções contínuas

$$\lambda_i : B \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que λ_i seja identicamente igual a 1 em $\overline{W_i}$, e zero fora de V_i .

Seja $h_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma trivialização de $\xi|_{U_i}$. Definimos

$$h'_i : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

com $h'_i(e) = 0$ se $\pi(e) \notin V_i$ e $h'_i(e) = \lambda_i(\pi(e))h_i(e)$ para $\pi(e) \in U_i$.

Terminamos a demonstração definindo a esperada função \tilde{f} por

$$\tilde{f} : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^{rn}$$

$$\tilde{f}(e) = (h'_1(e), \dots, h'_r(e)).$$

□

4.2 Fibrados

Acima foram estudados os fibrados vetoriais. No entanto estes são um caso particular do que chamamos de fibrado, os quais possuem grupo estrutural $GL(k, \mathbb{R})$, quando a fibra possui dimensão k . Em seguida estudaremos um tipo freqüente de fibrado, denominado de fibrado principal.

Definição 4.9. Um fibrado ξ é uma quintupla (E, π, B, F, G) satisfazendo

- E, B e F são espaços topológicos chamados respectivamente de **espaço total**, **espaço base** e **fibra**;
- $\pi : E \rightarrow B$ é uma função contínua chamada de projeção e $\pi^{-1}(b)$ denotado por F_b ou $F_b(\xi)$ é homeomorfo a F ;
- G é um grupo de Lie que age a esquerda de F e chamado de **grupo estrutural**;
- **Localmente trivial:** Dado $p \in E$ existe $U \subset B$ aberto contendo $\pi(p)$, existe homeomorfismo $\phi : U \times F \rightarrow \pi^{-1}(U)$ onde $\phi_b = \phi(b, \cdot)$ é um homeomorfismo sobre $\pi^{-1}(b)$;
- Sejam U_i e U_j referentes a uma trivialização com $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $\phi_\alpha(b, \cdot) = \phi_{\alpha,b}$ ($\alpha = \{i, j\}$) então $\gamma_{i,j}(b) = \phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p} : F \rightarrow F$ são chamadas de **funções de transição**. E $\gamma_{i,j}(b)$ é um elemento de G , com isto queremos dizer que existe $g \in G$ tal que $\gamma_{i,j}(b)(f) = gf$;
- As funções de transição satisfazem as seguintes propriedades:
 - a) $\gamma_{i,j}(p) = \text{identidade}$ ($p \in U_i$);
 - b) $\gamma_{i,j}(p) = \gamma_{j,i}(p)^{-1}$ ($p \in U_i \cap U_j$);
 - c) $\gamma_{i,j}(p)\gamma_{j,k}(p) = \gamma_{i,k}(p)$ ($p \in U_i \cap U_j \cap U_k$).

A definição de fibrado pode aparecer pedante em um primeiro momento, no entanto o estudo preliminar de fibrados vetoriais deve tornar a definição acima relativamente natural. Para organizarmos as idéias introduzimos mais um conceito.

Definição 4.10. Um *cociclo* de um espaço topológico B é uma cobertura aberta $\{U_i\}$ de B e funções contínuas $\gamma_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ tais que $\gamma_{ij} \cdot \gamma_{jk} = \gamma_{ik}$ se $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ e $\gamma_{ii} = Id$.

Esta definição implica que se tomarmos uma cobertura $\{U_i\}$ de B então as funções de transição formam por definição um cociclo. Os cociclos são exatamente a maneira pela qual colamos as vizinhanças trivializadoras. O próximo resultado nos fornece uma maneira de criarmos fibrados por meios dos cociclos.

Teorema 4.11. Dado um cociclo $\{\gamma_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G\}$ de B e uma ação de G sobre um conjunto F . Então esta ação e este cociclo definem um fibrado $\pi : E \rightarrow M$ tal que $\phi_{U_i} : \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\text{homeo}} U_i \times F$.

Demonstração. Tome o conjunto $\tilde{E} = \bigsqcup_i U_i \times F$ e definimos a seguinte relação de equivalência em \tilde{E} , $(p, v) \sim (q, w)$ se e somente se $p = q$ e $p \in U_i, U_j, w = \rho_{ij}(p)v$. Sendo ρ como definida mais acima.

Portanto o teorema segue se tomarmos $E = \tilde{E}$. □

O **fibrado das forma** fica determinado ao fornecermos a ação

$$GL(\mathbb{R}^n) \times \wedge^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \wedge^k(\mathbb{R}^n)$$

$$(T, \omega) \mapsto (T^{-1})^* \omega$$

Mais geralmente podemos falar do **fibrado tensorial (l,k)**,

$$GL(\mathbb{R}^n) \times L(\mathbb{R}^n, \dots, (\mathbb{R}^n)^*, \dots; \mathbb{R}) \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \dots, (\mathbb{R}^n)^*, \dots; \mathbb{R})$$

$$(L, T) \mapsto L^*T : (v_1, \dots, v_l, \lambda_1, \dots, \lambda_k) \mapsto (Lv_1, \dots, Lv_l, \lambda_1 \circ L, \dots, \lambda_k \circ L)$$

$l = 0, k = 1$ é o fibrado tangente.

$l = 1, k = 0$ é o fibrado cotangente.

Fibrado Principal

Um fibrado ξ é dito **fibrado principal** se o seu grupo estrutural, G , é idêntico a fibra F . Podemos definir uma ação de G à direita em G sobre as fibras da seguinte forma. Seja $\phi_i : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ uma trivialização local, temos $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$ e definimos a ação da seguinte forma $\phi_i^{-1}(ua) = (p, g_i a)$, ou seja

$$ua = \phi_i(p, g_i a)$$

vejamos que está bem definida, isto é independe da trivialização usada.

$$ua = \phi_j(p, g_j a) = \phi_j(p, \gamma_{ji}(p)g_i a) = \phi_i(p, g_i a)$$

Assim temos a ação

$$P \times G \rightarrow P$$

$$(u, a) \mapsto ua$$

Teorema 4.12. Dado uma seção $s : U \rightarrow P$ de um fibrado principal, então s define uma trivialização em P definida em $U \times G$.

Demonstração. Para $u \in \pi^{-1}(p)$ onde $p \in U$ existe um único $g_u \in G$ tal que $u = s(p)g_u$. Definimos $\phi : U \times G \rightarrow P$ da seguinte forma $\phi^{-1}(u) = (p, g_u)$. □

Vimos para fibrados vetoriais um resultado que garante a trivialização de um fibrado no caso de termos seções linearmente independentes, existe resultado análogo para fibrados principais, proveniente do resultado acima.

Corolário 4.1. *Um fibrado principal é trivial se, e somente se, existe uma seção global.*

4.3 Fibrado dos k-jatos

A seguir definiremos o conjunto dos k-jatos, que podem ser munidos de uma topologia de várias maneiras diferentes. Adotaremos a mesma usada em [3].

Definição 4.13. Um k-jato, $J^k(M, N)$, de M em N é uma classe de equivalência $[x, f, U]_k$ da tripla (x, f, U) onde $U \subset M$ aberto contendo x tal que $f : U \rightarrow N$ uma aplicação C^k . A relação de equivalência é dada da seguinte forma. $[x, f, U]_k = [x', f', U']_k$ se $x = x'$, $f(x) = f'(x')$ e para parametrização ϕ em torno de x e ψ em torno de $f(x)$ as funções f e f' em coordenadas (i.e. $\psi^{-1} \circ f \circ \phi$ e $\psi^{-1} \circ f' \circ \phi$ respectivamente) suas derivadas no ponto $\phi^{-1}(x)$ coincidem até a ordem k .

Temos associado a este conjunto a seguinte função $\sigma : J^k(M, N) \rightarrow M$, $\sigma[x, f, U]_k = x$. Coloquemos $J_x^k(M, N) = \sigma^{-1}(x)$. Usaremos a notação também $[x, f, U]_k = j_x^k f$.

Para o caso especial de $M = \mathbb{R}^m$ e $N = \mathbb{R}^n$ escrevemos $J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = J^k(m, n)$. Para um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$, o k-jato de f num ponto $x \in U$ tem um representante canônico, que é o seu polinômio de Taylor de grau k . Note que podemos descrever todas estas classes de equivalência pelo seguinte conjunto

$$P^k(m, n) = \mathbb{R}^n \times \prod_{j=1}^k L_s^j(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n).$$

Sendo que $L_s^j(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ representa o espaço vetorial formado pelas matrizes j-lineares simétricas de \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^n .

Assim temos as seguintes identificações.

$$J_x^k(m, n) = P^k(m, n)$$

$$J^k(m, n) = \mathbb{R}^m \times P^k(m, n)$$

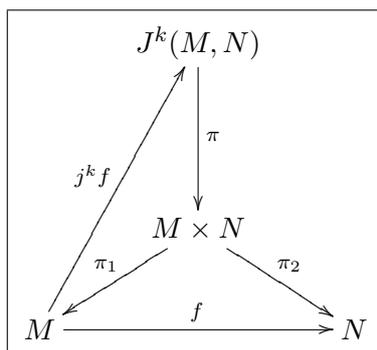
Iremos colocar uma topologia natural nos k-jatos e depois ver que o k-jatos é uma variedade, de fato um fibrado vetorial sobre $M \times N$ e fibra $\prod_{j=1}^k L_s^j(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Sejam (ϕ, U) e (ψ, V) cartas em M e N respectivamente. Considere a seguinte bijeção

$$\theta : J^k(U, V) \rightarrow J^k(\phi U, \psi V)$$

$$j_x^k f \mapsto j_y^k(\psi f \phi^{-1}), \quad y = \phi(x)$$

Impomos que $(\theta, J^k(U, V))$ sejam as cartas para $J^k(M, N)$.

Terminamos com a observação que dada uma função $f : M \rightarrow N$ ela induz uma seção no fibrado dos k-jatos como sendo $j^k f : M \rightarrow J^k(M, N)$ dada por $j^k f(x) = [x, f, M]_k$. Veremos na próxima subseção como podem ser usadas essas seções do fibrado para se colocar uma topologia no espaço de funções.



variedade F define um fibrado com fibra F em B . transitivamente nas fibras e sem pontos fixos.

5 Espaço de Funções e Transversalidade

somente se i) $df(x)$ é 1-1 para todo x em M . ii) $f(x) \neq f(y)$ com x diferente de y então $ImDf(x) \cap ImDf(y) = \emptyset$ e A é residual.

5.1 Topologia C^r de Whitney

O conjunto $C^r(M, N)$ das funções suaves de M em N pode ser munido de uma topologia natural, chamada de topologia forte de Whitney. A qual chamaremos apenas de topologia de Whitney. Poderíamos colocar também uma topologia conhecida como topologia fraca de Whitney ou topologia compacto-aberto, mas não é de nosso interesse. Para mais da topologia fraca de Whitney confira [3] capítulo 2. As duas topologias coincidem quando M é compacto.

Uma **base de abertos** ou simplesmente uma base num espaço topológico X é uma coleção \mathcal{B} de subconjuntos abertos de X que chamaremos de **abertos básicos** ou vizinhanças fundamentais com a seguinte propriedade: Todo subconjunto aberto $A \subset X$ se exprime como reunião $A = \cup_{\lambda} B_{\lambda}$ de abertos $B_{\lambda} \in \mathcal{B}$. Mais a frente o que faremos em geral é exibir as vizinhanças fundamentais de um espaço e considerar a topologia gerada por eles, no entanto não ficaremos de forma enfadonha provando que elas geram topologias, no entanto lembremos dois resultados da topologia que tem este intuito.

Fato Topológico 1: Seja X um espaço topológico. Uma coleção \mathcal{B} de abertos de X constitui uma base em X se, e somente se, para todo aberto $A \subset X$ e cada $x \in A$ existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset A$.

Fato Topológico 2: Seja \mathcal{B} uma coleção de subconjuntos de um conjunto X . Para que \mathcal{B} seja base de uma topologia em X é necessário e suficiente que se cumpram as condições abaixo.

1. Para todo $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$;
2. Se $x \in B_1 \cap B_2$ onde $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ então existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Definição 5.1. A topologia de Whitney de $C^r(M, N)$ é definida declarando-se os abertos que geram a sua topologia, construídos a seguir.

Sejam $f \in C^r(M, N)$, $\Phi = \{\phi_i, U_i\}_{i \in \Lambda}$ atlas de M localmente finito, $K = \{K_i\}_{i \in \Lambda}$ cobertura por compactos de M com $K_i \subset U_i$ tal que $f(U_i) \subset V_i$, onde $\Psi = \{\psi_i, V_i\}_{i \in \Lambda}$ atlas de N e $\epsilon = \{\epsilon_i\}_{i \in \Lambda}$.

Definimos portanto uma vizinhança fundamental $\mathcal{N}^r(f; \Psi, \Phi, K, \epsilon)$ de f como sendo o conjunto das $g : M \rightarrow N$ tal que para todo $i \in \Lambda$, $g(K_i) \subset V_i$ e $\|D^k(\psi_i f \phi_i^{-1})(x) - D^k(\psi_i g \phi_i^{-1})(x)\| < \epsilon_i$ para todo $x \in \phi_i(K_i)$, $k = 0, \dots, r$.

Observação: Depois da definição acima, sempre que falarmos em $C^r(M, N)$ fique bem entendido que estaremos supondo que o espaço está munido da topologia de Whitney.

Lembremos que a definição de **espaço de Baire**, é um espaço topológico com a propriedade de que interseção enumerável de conjuntos aberto e denso é um conjunto denso. Dizemos que um conjunto é **residual** quando é a interseção enumerável de abertos densos. Estando em um espaço de Baire, a propriedade de ser residual é muito forte. Para citar um exemplo, suponha que se prove que conjuntos que possuam uma determinada propriedade P_i seja residual, isto implica que o conjunto que satisfaz todas estas propriedades continua sendo residual, em particular denso.

Teorema 5.2. *O espaço topológico $C^r(M, N)$ é um espaço de Baire.*

Demonstração. A prova segue exatamente a mesma idéia para se provar que \mathbb{R}^n é um espaço de Baire. Sejam $A_i \subset C^r(M, n)$ abertos e densos, devemos verificar que dada uma vizinhança $\mathcal{V}(f)$ de f em $C^r(M, N)$ então $(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) \cap \mathcal{V}(f) \neq \emptyset$. É claro que para provar o teorema podemos supor que a vizinhança é na verdade uma vizinhança fundamental como descrita na definição acima. Ou seja $\mathcal{V}(f) = \mathcal{N}^r(f; \Psi, \Phi, K, \epsilon)$.

Sendo A_1 aberto e denso, existe $g_1 \in A_1 \cap \mathcal{V}(f)$. Existe aberto $\mathcal{V}(g_1) \subset A_1 \cap \mathcal{V}(f)$. A vizinhança é tomada como sendo uma vizinhança fundamental e o conjunto dos ϵ 's associados são tomados pequenos o suficiente para que sejam menores do que a metade dos relativos ao da vizinhança $\mathcal{V}(f)$. Definimos agora indutivamente e dessa forma os ϵ 's associados vão sempre diminuindo em pelo menos a metade do anterior.

É claro que temos que as $\{g_i\}$ convergem localmente uniformemente, assim como suas respectivas derivadas. Portanto segue da análise no \mathbb{R}^n que temos $\lim_{i \rightarrow \infty} g_i = g \in C^r(M, N)$. \square

Podemos colocar também uma topologia no espaço $C^r(M, N)$ da seguinte forma. Seja $f \in C^r(M, N)$ e $U \subset J^r(M, N)$ aberto, definimos uma vizinhança fundamental de f por $\mathcal{V}(f, U) = \{g \in C^r(M, N) \mid j^r g(M) \subset U\}$. E de fato essa topologia gera a topologia de Whitney.

A topologia de Whitney é uma topologia que contém muitos abertos. Ou seja, falar em convergência neste espaço é muito forte. (Vide exercícios abaixo)

Exercício 5.1.

- a) $C^r(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ não possui uma base contável em nenhum ponto.
- b) se $\{f_n\}$ é uma seqüência que converge a g em $C^r(M, N)$ então existe um compacto $K \subset M$ e um inteiro m tal que $f_n(x) = g(x)$ para todo $n > m$ e para todo $x \in M - K$.

Esta seção introduz um conceito importante conhecido como transversalidade, que é a generalização do conceito de valor regular e como tal possui um análogo ao teorema apresentado na subseção 3.5.

Definição 5.3. Sejam M, N variedades, S uma subvariedade de N . Dizemos que uma função suave $f : M \rightarrow N$ é transversal a S , denotado por $f \bar{\cap} S$, se para $x \in f^{-1}(S)$ e $f(x) = z$ temos que $Df_x TM_x + TS_z = TN_z$.

definição de valor regular quando a subvariedade N tem dimensão zero. Logo, como uma extensão da definição de valor regular também é natural esperar o próximo teorema.

quando consideramos S sendo uma variedade de dimensão zero, ou seja, um ponto. E como prometido segue o teorema.

Teorema 5.4. Sejam $f : M \rightarrow N$ e $f \bar{\cap} S$, onde $S \subset N$ é uma subvariedade. Então $f^{-1}(S)$ é uma subvariedade de M de codimensão igual a codimensão de S em N .

Demonstração. Sendo S uma subvariedade de N , dado um ponto $z \in S$ considere uma carta adaptada a S centrada em p , isto é.

$$\phi : \mathcal{V} \rightarrow I_s \times I_{n-s}$$

$$\phi(\mathcal{V} \cap S) = I_s \times \{0\}, \phi(z) = 0$$

onde $I_s \subset \mathbb{R}^s$, $I_{n-s} \subset \mathbb{R}^{n-s}$ são abertos. Seja $\pi : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s} \rightarrow \mathbb{R}^{n-s}$ a função projeção. Dado $x \in M$ tal que $f(x) = z$, então zero é valor regular da função

$$\pi \circ \phi \circ f : \mathcal{U} \rightarrow \{0\} \times \mathbb{R}^{n-s}$$

onde, por continuidade, $\mathcal{U} \subset M$ é uma vizinhança de $x \in M$ tal que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$.

Por fim, observe que $\{0\} \subset \mathbb{R}^{n-s}$ é valor regular da aplicação $\pi \circ \phi \circ f$, e portanto $f^{-1}(S) \cap \mathcal{U}$ é uma subvariedade de codimensão $n - s$ em M . \square

Poderíamos nos perguntar quão comum são as funções transversais a uma dada subvariedade S . O próximo teorema, é um passo nesta direção. E mais á frente veremos que elas são de fato muito comuns (densas).

Proposição 5.1. Sejam M, S, N variedades e considere uma função $F : M \times S \rightarrow N$. Se $F \bar{\cap} Z$ sendo Z uma subvariedade de N , então para um conjunto residual $\mathcal{S} \subset S$ temos que $F_s \bar{\cap} Z$, com $s \in \mathcal{S}$. Onde $F_s(\cdot) = F(\cdot, s) : M \rightarrow N$.

Demonstração. Seja $\pi : M \times S \rightarrow S$ a projeção sobre a segunda coordenada e $W = F^{-1}(Z)$ é uma variedade. Mostrando que se $s \in \mathcal{S}$ for um valor regular da restrição $\pi|_W : W \rightarrow S$, implicar $F_s \bar{\cap} Z$; o teorema seguirá pelo Teorema de Sard.

Dado $a \in TN_z$ onde $z = F(x, s)$ por transversalidade existe $b \in T_{(x,s)}(M \times S)$ tal que

$$DF_{(x,s)}(b) - a \in TZ_z$$

Escrevamos $b = (w, e)$. Teríamos acabado caso $e = 0$ já que F restrita a $M \times \{s\}$ é F_s . Para ver que podemos zerar e usamos a condição de valor regular. Como

$$d\pi(x, s) : TM_x \times TS_s \rightarrow TS_s$$

É a projeção, então existe $(u, e) \in T_{(x,s)}W$ e portanto $DF_{(x,s)}(u, e) \in TZ_z$. Conseqüentemente o vetor $v = w - u \in TM_x$.

E assim

$$DF_s(v) - a = DF_{(x,s)}[(w, e) - (u, e)] - a = [DF_{(x,s)}(w, e) - a] - DF_s(u, e) \in TZ_z$$

□

Considere uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^k$ um aberto. Definamos a função

$$F : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$F(x, v) = f(x) + v$$

Assim, dado qualquer subvariedade Z de \mathbb{R}^n olhando a derivada com relação a segunda coordenada de F que é a identidade isso fornece claramente $F \bar{\cap} Z$. Por conseguinte a Proposição (5.1) fornece um conjunto residual para o qual F_v é transversal a Z . Como podemos pegar v tão pequeno, em norma, quanto se desejar, F_v é apenas uma pequena perturbação de f .

espaço $C^r(M, N)$ com a topologia de Whitney é um espaço de Baire. Tendo este resultado em mente poderemos provar o próximo teorema.

Teorema 5.5. *Seja S subvariedade fechada de N . Então o conjunto $\{g \in C^r(M, N) \mid g \bar{\cap} S\}$ é aberto e denso.*

Demonstração. Usamos a mesma notação que na definição 5.1.

Abertura: Seja $f : M \rightarrow N$ transversal a S , queremos achar uma vizinhança fundamental \mathcal{N} para o qual todas as funções em \mathcal{N} sejam transversais a S .

Considere uma cobertura $\{V_i\}$ para S de forma que em V_i a subvariedade S seja a imagem inversa do valor regular zero (Teorema 5.4). E para terminar de cobrir N podemos tomar $N - S$. Estes são portanto os abertos V_i da definição. (Se necessário fazemos refinamento localmente finito)

Construimos os U_i da seguinte maneira. Seja $p \in M$. Existem duas possibilidades $f(p) \in S$ ou $f(p) \notin S$. No primeiro caso, tome uma vizinhança de p , U_p , tal que, por S ser fechada, tenhamos $f(U_p) \cap S = \emptyset$. Para o outro caso, $f(p)$ pertence a algum V_i e consideramos uma U_p pequeno o suficiente para que $f(U_p) \subset V_i$. Como $f \bar{\cap} S$ lembremos da demonstração Teorema 5.4 quando fizemos uma composição com a função projeção e vimos que zero é valor regular. Com isso podemos achar uma vizinhança V_p tal que $f \bar{\cap} S$ em V_p . Da construção desses conjuntos U_p fazemos um refinamento caso necessário e escolhemos a cobertura que queremos U_i , de forma também que

$K_i \subset U_i$ sejam cobertura de M . (esses U_i podem ser tomados claramente como tendo fecho compacto, supomos esses U_i indo em bolas de raio 3 e os K_i em bolas de raio 2.)

Devemos construir os ϵ_i . Para os U_i que são levados por f em conjunto que não intersecta S , podemos pegar por compacidade ϵ_i pequeno o suficiente para que a perturbação continue não tocando. E para os outros V_p , como $f \bar{\cap} S$ lembremos da demonstração Teorema 5.4 quando fizemos uma composição com a função projeção e vimos que zero é valor regular. Peguemos ϵ_i pequeno o suficiente para manter esta propriedade, já que sobrejetividade é propriedade aberta da derivada e assim fica provado a abertura.

Densidade: Considere os seguintes conjuntos $T_i = \{g \in C^r(M, N) | g \bar{\cap} S \text{ em } K_i\}$. Se provarmos que os T_i são abertos e densos a sua interseção

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} T_i$$

é o conjunto que queremos provar ser denso. Sendo $C^r(M, N)$ um espaço de Baire teríamos justamente o que queremos. Sabemos por um raciocínio análogo ao feito acima que os T_i são abertos. Para ver a densidade olhamos uma função qualquer em cartas. Como os K_i estão contidos em uma carta, considero uma bump-function ϕ , que seja identicamente 1 em K_i e se anule fora de uma vizinhança de K_i . Considerando em coordenadas escrevermos a função $\tilde{f} = f + \phi v$, com isso posso levantar esta função. E para que ela seja de fato uma aproximação de f , como ϕ está fixo temos pela discussão feita consecutivamente a Proposição 5.1 podemos pegar este v tão pequeno que a função seja transversal em K_i e que seja uma aproximação. \square

No teorema acima a abertura se deve ao fato de S ser fechada. A figura (4) fornece uma idéia de como pode ser quebrada a abertura. No caso S é uma variedade 1 dimensional aberta e a imagem de f não toca S . O que garante a transversalidade. No entanto é possível fazer perturbações finas o suficiente de f para que sua imagem seja tangente a variedade S . Logo, se S for aberta não podemos garantir a abertura, mas ainda temos a densidade.

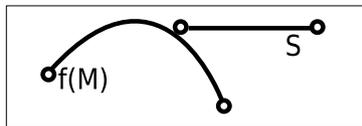


Figura 4: Não abertura da transversalidade

Corolário 5.1. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma função suave e S uma subvariedade qualquer de N . Então o conjunto $\{g \in C^r(M, N) | g \bar{\cap} S\}$ é denso.*

Demonstração. Podemos escrever $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ sendo K_i subvariedades compactos (com bordo) e $K_i \subset \text{int}.K_{i+1}$. Consideremos portanto $\tilde{T}_i = \{g \in C^r(M, N) \mid g \overline{\cap} K_i\}$. Se provarmos que estes conjuntos são abertos e densos, usamos novamente que estamos em um espaço de Baire e $\bigcap_{i=1}^{\infty} \tilde{T}_i$ é denso. Sendo esta interseção exatamente as funções que procurávamos mostrar que formam um conjunto denso.

Novamente procedemos com a mesma demonstração feita no teorema acima, no entanto de forma um pouco mais cuidadosa. O único problema poderia aparecer quando temos $f(x) \in \partial K_i$. Mas neste caso a análise é feita olhando-se para $\text{int}.K_{i+1}$ e assim neste conjunto podemos proceder para este ponto e ver que as vizinhanças obtidas como na demonstração acima servem para este caso, pois como $K_i \subset \text{int}.K_{i+1}$ provando a transversalidade de $f(x) \in \text{int}.K_{i+1}$ automaticamente implica a transversalidade em K_i .

uma variedade sem bordo, no entanto não é difícil ver que a demonstração segue facilmente se supormos que S seja uma variedade fechada com bordo.

Como um fato que segue da topologia iremos escrever $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ onde S_i são subvariedades com bordo de N . Com isso analogamente ao que foi feito no teorema definimos os conjuntos $\tilde{T}_i = \{g \in C^r(M, N) \mid g \overline{\cap} S_i\}$ que pelo teorema é aberto e denso. Novamente, como $C^r(M, N)$ é espaço de Baire, \square

Exercício 5.2. Seja M uma subvariedade de \mathbb{R}^n de codimensão 3. Então $\mathbb{R}^n - M$ é simplesmente conexo.

SUAVES

5.2 Densidade de Funções Suaves

Se tivermos uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, então podemos fazer uma aproximação (na topologia C^0) dela por funções C^∞ como uma simples aplicação da partição da unidade. No entanto olhando o conjunto $C^r(M, N)$ (com a topologia de Whitney) queremos fazer aproximações por funções C^∞ nesta topologia. O problema, agora, se torna mais delicado pois queremos controlar também as derivadas. com isso iremos utilizar a idéia de um conceito conhecido na análise como **convolução**.

Proposição 5.2. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $K \subset U$ compacto. Dados um número $\delta > 0$ e uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r , existe uma aplicação $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ , tal que $|g - f|_r < \delta$ em K .*

Observação: Onde $|g - f|_r < \delta$, se refere a $|f^{(j)}(x) - g^{(j)}(x)| < \delta$ com $x \in K$ e $j \in \{0, 1, \dots, r\}$.

Existencia
de h! Ver
teo. tietze
dif.: Elon,
varied.
dif. pag
202

Demonstração. Seja $\eta > 0$ tal que $\overline{V_\eta(K)} \subset U$, onde $V_\eta(K)$ é uma η -vizinhança de K . Tomemos uma $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r tal que $h = f$ em $\overline{V_\eta(K)}$. Se η for tomado suficientemente pequeno, então para $j = 0, 1, \dots, r$

$$\sup\{|h^j(x+y) - h^j(x)|; x \in K, |y| \leq \eta\} < \delta,$$

por continuidade uniforme. Seja $\phi_\eta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não-negativa suave, tal que $\phi_\eta(y) = 0$ quando $|y| \geq \eta$ e tal que $\int \phi_\eta = 1$. Definamos $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ pondo

$$g(x) = \int \phi_\eta(y)h(x+y)dy = \int \phi_\eta(z-x)h(z)dz$$

Podemos derivar sob o sinal da integral o que nos permite ver que $g \in C^\infty$. Concluimos a demonstração com a seguinte desigualdade. Para $x \in K$,

$$|g^{(j)}(x) - f^{(j)}(x)| = |g^{(j)}(x) - h^{(j)}(x)| = \left| \int \phi_\eta(y)[h^{(j)}(x+y) - h^{(j)}(x)]dy \right| \leq \sup_{|y| \leq \eta} |h^{(j)}(x+y) - h^{(j)}(x)| \cdot \int \phi_\eta(y)dy < \delta \quad \square$$

A ideia da prova está em considerar a função g na demonstração acima. A função g pode ser definida também como sendo a convolução de ϕ_η por h . Isto é de fato tudo que precisaremos deste conceito. Convoluções tem a propriedade de suavizar funções.

Em rumo aos nossos teoremas de densidade precisaremos do seguinte lema auxiliar.

Lema 5.1. *Seja $f : B(3) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^r . Dado um número real $\delta > 0$, existe uma aplicação $h : B(3) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r tal que*

- $h = f$ em $B(3) - B(2)$;
- $|h - f|_r < \delta$ em $B(3)$;
- $h \in C^\infty$ em $B(1)$.

Além disso, em parte alguma de $B(3)$, h é menos diferenciável do que f .

Demonstração. Tome uma bump-function, ϕ que valha 1 em $B(1)$ e se anule fora de uma vizinhança de $B(1)$. Com isso considere a seguinte função $h = f + \phi \cdot (g - f)$. Como ϕ está fixada posso tomar pela proposição acima g suficientemente perto de f de modo a satisfazer $|h - f|_r < \delta$ em $B(3)$. E o resto é fácil ver. \square

Provemos agora um importante teorema sobre densidade das funções C^∞ .

Teorema 5.6. *Sejam M e N variedades. Então as funções $f : M \rightarrow N$, C^∞ são densas em $C^k(M, N)$ (topologia de Whitney).*

Demonstração. Iremos construir com o auxílio dos resultados acima uma seqüência de aplicações que vão dando localmente a propriedade desejada, de aproximação, culminando com uma função do tipo almejada.

Seja $f : M \rightarrow N \in C^r(M, N)$. Começemos a seqüência de aproximações com $f_0 = f$. Seja $\mathcal{V}(f) = \mathcal{N}^r(f; \Psi, \Phi, K, \epsilon)$ uma vizinhança fundamental de f como definido na seção 4 e manteremos a notação lá adotada. Observando que podemos supor (fazendo refinamentos) que os U_i estão contidos em domínios de cartas locais. Definimos f_1 pelo lema acima de forma que $f_1 = f_0$ em $M - U_i$ e f_1 é suave em K_1 , $|f_1 - f_0|_r < \epsilon/2^1$ e se necessário fazendo uma aproximação mais fina claro que podemos garantir também que $f_1(U_j) \subset V_j$ para todo j . Definimos uma seqüência que tenha a seguinte propriedade.

1. $f_i = f_{i-1}$ em $M - U_i$;
2. $f_i \in C^\infty(M, N)$ em $K_1 \cup \dots \cup K_i$;
3. $|f_i - f_{i-1}|_r < \epsilon/2^i$ em M ;
4. $f_i(U_j) \subset V_j$ para todo j .

Suponha então que construímos uma tal seqüência até a ordem f_{i-1} vejamos como construímos f_i satisfazendo as propriedades acima. Mais uma vez pelo lema acima fazemos a utilização somente em U_i e com isso modificamos f_{i-1} apenas neste conjunto e claro satisfazendo portanto os outros itens, assim como feito para f_1 .

Definimos portanto a nossa função como sendo o limite das f_i que está bem definida tendo em vista que para um dado ponto existe uma vizinhança e um momento em que a seqüência f_i se torna constante, por construção. E a propriedade (3) nos garante que não saímos de $\mathcal{V}(f)$. E assim fica provado o teorema.

□

5.3 Imersões e Mergulhos

Pouca coisa temos até agora sobre as imersões e os mergulhos além de suas definições. No entanto esses conceitos são importantes demais para serem esquecidos. Começemos falando sobre os mergulhos.

Teorema 5.7. *Seja M uma variedade compacta. Então existe um mergulho de M em \mathbb{R}^q para algum q .*

Demonstração. Sendo M compacta então existe uma quantidade finita de carta $\{U_i, \phi_i\}_{i=1}^k$ tais que suas imagens contenham sempre a bola $B[2]$ e $M = \bigcup \text{int}.\phi_i^{-1}(B(1))$. Seja $\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\xi|_{B[1]} \equiv 1$ $0 < \xi < 1$ em $B(2) - B[1]$ e $\xi|_{B[2]^c} \equiv 0$. Definimos agora as funções suaves

$$\xi_i : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\xi_i = \begin{cases} \xi \circ \phi_i & \text{em } U_i \\ 0 & \text{em } M - U_i \end{cases}$$

Definimos também as funções

$$f_i : M \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$f_i(x) = \begin{cases} \xi_i(x)\phi_i(x) & \text{se } x \in U_i \\ 0 & \text{se } x \in M - U_i \end{cases}$$

Podemos agora explicitar o nosso mergulho, como sendo dado por.

$$g : M \rightarrow \mathbb{R}^{k(m+1)}$$

$$g(x) = (f_1(x), \xi_1(x), \dots, f_k(x), \xi_k(x))$$

Primeiramente vemos que g é imersão em todos os pontos porque dado um ponto localmente temos que uma das funções f_i é de fato uma carta. Vejamos que é injetiva, tome $x \neq y$ (devemos checar que $g(x) \neq g(y)$ então se eles estão em conjuntos diferentes da imagem da inversa de $B(1)$ pela carta então os ξ_i relativos “as suas bolas” os tornará diferentes por exemplo $\xi_{i_x}(x) = 1$ mas $\xi_{i_x}(y) \neq 1$ e se eles estiverem dentro de uma mesma bola então alguma f_i é de fato uma carta o que mostra a diferença. Por fim um teorema da topologia garante que toda função contínua injetiva definida em um compacto é um homeomorfismo sobre a sua imagem. Sendo assim o teorema fica provado. \square

Aproveitamos para fazer algumas observações convenientes ao momento. Primeiramente este teorema foi provado para uma variedade compacta, no entanto o teorema é válido para variedades quaisquer não necessariamente compacta (por exemplo vide [3]). Estes teoremas jogam uma luz sobre as variedades, vejamos o porque. Em geral o estudo de variedade é iniciado com as superfícies em espaços euclidianos, pega-se toda a intuição necessária e então passa-se as variedades definidas em espaços topológicos e aparentemente é feita uma grande generalização. No entanto se $f : M \rightarrow \mathbb{R}^p$ for um mergulho implica que $f(M)$ é uma variedade de \mathbb{R}^p e que M e $f(M)$ são difeomorfas. Ou seja no fundo toda variedade pode ser olhada como uma variedade em algum espaço euclidiano.

Focaremos agora os esforços para provar um teorema sobre densidade das imersões, mas antes necessitamos do seguinte lema.

Lema 5.2. *Sejam $f : B(3) \rightarrow \mathbb{R}^s$ de classe C^r , $F \subset B(3)$ um subconjunto fechado tal que $f|_F$ é uma imersão e $s \geq 2m$. Dado $\epsilon > 0$, existe $h : B(3) \rightarrow \mathbb{R}^s$ suave tal que $|h - f|_r < \epsilon$ em $B(3)$, $h|_{\overline{B(1)}} \cup F$ é uma imersão e $h = f$ em $F \cup [B(3) - B(2)]$.*

Demonstração. Para não nos perdermos em tecnicidades provaremos a seguinte afirmação. Dado $\epsilon > 0$, existe uma imersão $g : B(3) \rightarrow \mathbb{R}^s$ suave com $|g - f|_r < \epsilon$ em $B(3)$.

Como já provamos mais acima a densidade das funções suaves é claro que não há dano em supor f suave. Tentemos achar uma g que tenha a forma $g(x) = f(x) + Ax$ sendo A uma matriz $s \times m$. Buscamos uma A pequena e também de forma que $g'(x) = f'(x) + A$ tenha posto m ou seja, não tenha posto menos do que m tendo em vista que $B(3) \subset \mathbb{R}^m$.

As matrizes $s \times m$ de posto $i < m$ constituem uma superfície $N_i \subset \mathbb{R}^{sm}$ de dimensão $(m - i)(s - i)$. Temos $s \geq 2m$ e $i \leq m - 1$ o que fornece a desigualdade $(m - i)(s - i) \geq 1 \cdot [2m - (m - 1)] = M + 1$. As superfícies N_i têm portanto codimensão i em \mathbb{R}^{sm} .

Objetivamos utilizar o lema ??, para tal basta ver que $f' : B(3) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^s) \sim \mathbb{R}^{sm}$ é suave e com isso pelo referido lema existe um conjunto residual tal que $f'(x) + A$ tem posto m para todo $x \in B(3)$, fornecendo as condições que precisavamos para terminar a prova do lema. □

Munidos do lema acima podemos partir finalmente para a demonstração do próximo teorema.

Teorema 5.8. *Sejam M^m e N^s variedades. Se $s \geq 2m$ as imersões $g : M \rightarrow N$ constituem um subconjunto denso de $C^r(M, N)$ para qualquer r .*

Demonstração. Peguemos uma vizinhança fundamental $\mathcal{V}(f) = \mathcal{N}^r(f; \Psi, \Phi, K, \epsilon)$ de f , queremos achar uma função que seja uma imersão e que esteja em $\mathcal{V}(f)$.

Deve se notar semelhança (restrita ao assunto de cada um) dos lemas 5.1 e 5.2, não por menos a demonstração do teorema que veremos segue as linhas da demonstração da densidade das funções suaves.

Isso fica claro que podemos construir a seguinte seqüência $\{f_i\}$ de funções

1. $f_0 = f$ e $f_i = f_{i-1}$ em $M - V_i$;
2. $|f_i - f_{i-1}|_r < \epsilon/2^i$ em M ;
3. f_i é uma imersão em K_i .
4. $f(U_i) \subset V_i$.

Onde os V_i e K_i seguem a notação que adotamos sempre que falamos na vizinhança $\mathcal{V}(f) = \mathcal{N}^r(f; \Psi, \Phi, K, \epsilon)$. Essa seqüência é construída de forma totalmente análoga ao que fizemos no teorema de densidade de funções suaves, como já foi mencionado. □

Estes teoremas sobre imersões e mergulhos podem ser melhorados. Por exemplo, de posse do teorema acima pode-se melhorar o teorema que vimos sobre mergulhos. Uma variedade M^m compacta pode ser mergulhada em \mathbb{R}^{2m} . O que é algo muito mais forte do que tivemos. Está fora do escopo deste trabalho a demonstração deste resultado no entanto é válido comentar rapidamente como é feita. É observar que este resultado seguiria se for provado os dois resultados a seguir.

- Seja $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma imersão. Se $N > 2n$ então existe um hiperplano $\mathbb{R}^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$ tal que a composição de f e a projeção sobre este plano é uma imersão.
- Suponha que M^m seja uma variedade compacta e $f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ seja um mergulho. Se $N > 2n + 1$, então existe um hiperplano $\mathbb{R}^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$ tal que a composição de f com a projeção neste hiperplano é um mergulho.

Estas idéias podem ser encontradas em [17] assim como outros teoremas interessantes sobre imersões e mergulho.

6 Teorema Colar e Teoria de Morse

Iremos agora estudar resultados que descrevem geometricamente melhor nossas variedades, assim como desenvolver técnicas de construção de variedades.

6.1 Vizinhança Tubular e Teorema Colar

Iniciamos com uma definição.

Definição 6.1. Um colar em uma superfície com bordo M é um mergulho $f : \partial M \times [0, \infty] \rightarrow M$ tal que $f(x, 0) = x$.

Teorema 6.2 (Teorema Colar). *Dada uma superfície com bordo M então ∂M tem um colar.*

Demonstração. Considere uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ localmente finita do bordo de ∂M . E $\{W_i \subset U_i\}_{i \in I}$ também seja uma cobertura aberta de ∂M e tais que o fecho $\overline{W_i} \subset U_i$. Em cada U_i considere o campo constante de velocidade 1 por exemplo que aponta para cima, e levantamos este campo a variedade multiplicando por uma bump-function de modo que em W_i seja identicamente 1 e se anule fora de uma vizinhança de W_i . Com isso podemos somar todos estes campos na superfícies que é transversal ao bordo. Com isso o fluxo dará a função da definição do colar. \square

Teorema 6.3 (Vizinhança Tubular). *Seja $M \subset \mathbb{R}^{m+n}$ uma superfície compacta de dimensão m . Então existe um função estritamente positiva $\epsilon : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que duas quaisquer bolas normais $B^\perp(x; \epsilon(x))$ e $B^\perp(y; \epsilon(y))$, com centros em pontos distintos $x \neq y$ de M , são disjuntos. A reunião $V_\epsilon(M) = \cup_{x \in M} B(x; \epsilon(x))$ dessas bolas normais é um aberto em \mathbb{R}^{m+n} e a aplicação $\pi : V_\epsilon(M) \rightarrow M$ que associa a cada $z \in V_\epsilon(M)$ o centro $x = \pi(z)$ da única bola normal $B^\perp(x; \epsilon(x))$ que contém z é suave.*

Demonstração. Primeiro fazemos a prova localmente e depois estendemos a toda variedade. Cubramos a variedade M por abertos U tal que estejam definidos campos vetoriais suaves que linearmente independentes e ortogonais a variedade M . Definimos a aplicação $\Phi : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ por $\Phi(q, y) = q + \sum_{i=1}^n y_i \cdot w_i(q)$. Teremos que a derivada $D\Phi(p, 0) : TM_p \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ é um isomorfismo. E portanto pelo teorema da aplicação inversa podemos restringir o aberto $U \ni p$ e tomar $\epsilon > 0$ de modo que Φ seja um difeomorfismo de $U \times B(\epsilon)$ sobre um aberto de \mathbb{R}^{m+n} . Esse aberto em \mathbb{R}^{m+n} é justamente uma “bola normal”. No caso compacto, como cobrimos M por essas vizinhanças peguemos uma quantidade finita, e diminuimos a ponto de continuarmos com difeomorfismo. No caso não compacto toma-se a função ϵ pequena o suficiente para que as bolas não se interceptem. \square

quando M não é compacta. Vide [3] ou [10].

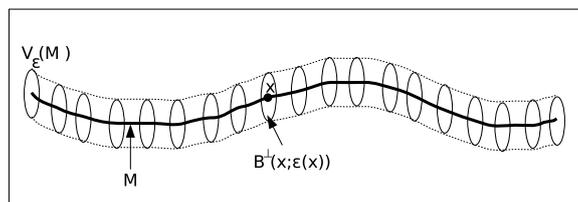


Figura 5: Vizinhança Tubular

6.2 Campos Gradiente

Faremos o estudo de campos gradientes sobre variedade. Um conceito importante e que será usado em breve para o entendimento da teoria de Morse.

Considere (M, \langle, \rangle) uma variedade Riemanniana, não necessariamente compacta. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, então definimos o campo gradiente de f como sendo o campo ∇f que satisfaz a seguinte relação.

$$df(p).v = \langle \nabla f(p), v \rangle_p, \quad \text{onde } p \in M, v \in T_p M$$

É, portanto, muito fácil se construir um campo gradiente em uma variedade. Vejamos então algumas propriedades deste tipo de campo. Fixemos a notação por enquanto, onde $\phi_t(x)$ será a curva integral do campo gradiente ∇f , fixado alguma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Lema 6.1.

$$\frac{d}{dt} f \circ (\phi_t(x)) \geq 0$$

Valendo a igualdade se, e somente se, $\nabla f(\phi_t(x)) = 0$.

Demonstração. Temos da definição e pela regra da cadeia que $\frac{d}{dt} f \circ (\phi_t(x)) = df_{\phi_t(x)} \frac{d}{dt} \phi_t(x) = \langle \nabla f(\phi_t(x)), \nabla f(\phi_t(x)) \rangle$ \square

Isto quer dizer f é não decrescente ao longo das trajetórias de ∇f .

Proposição 6.1. *Seja . Se $p \in M$ é tal que existe seqüência $\{t_i\}$ de tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \omega(x)$ e $\lim_{i \rightarrow \infty} \phi_{t_i} = p$. Então p é um ponto crítico de f .*

Demonstração. Suponha que p não seja um ponto crítico de f , portanto o campo é não nulo em p . Como ϕ_{t_i} se aproxima de p em um dado momento tempos que de tão próximo a curva integral deve atravessar a superfícies de nível $f^{-1}(f(p))$. Portanto considere $\xi \in \mathbb{R}_+$ tal que $f(\phi_\xi(x)) > f(p)$. Por continuidade existe vizinhança V de p tal que $\forall x \in V$ temos $f(\phi_\xi(x)) > f(z)$, assim para todo $t > \xi$ implica que $\phi_t(x) \notin V$. Absurdo. \square

Assim como na análise no \mathbb{R}^n temos que o gradiente da função aponta para a direção de maior crescimento da função.

6.3 Funções de Morse

Considere por exemplo uma função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Olhemos para um ponto $x \in M$ com isso existem duas possibilidades x é um ponto regular ou $df_x = 0$, no caso de ser um ponto regular podemos olhar em outras coordenadas e a função torna-se apenas a projeção na primeira coordenada. Ou seja, para um valor regular temos uma boa descrição do comportamento da função, gostaríamos de saber então qual o comportamento local da função no caso de $df_x = 0$.

Definição 6.4. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dizemos que x é um *ponto crítico não degenerado* se for um ponto crítico e se a matriz Hessiana no ponto x é não singular.

Um esclarecimento que fazemos com relação a definição é a de que quando falamos em ponto crítico e matriz Hessiana estamos olhando em coordenadas, no entanto como era de esperar esses conceitos ficam bem definidos pois são invariantes por mudanças de coordenadas. Ou seja, se f for uma função em \mathbb{R}^k com ponto crítico não degenerado no ponto 0 e ψ um difeomorfismo que leva o zero no zero então a função $f \circ \psi$ tem ponto crítico não degenerado em 0.

Os pontos críticos não degenerados são bons de se trabalhar pois eles são isolados, para ver isso basta considerar a função $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, $g = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k})$ então $df_x = 0$ se e somente se $g(x) = 0$ mas pelo teorema da função inversa g é um difeomorfismo local.

Definição 6.5. $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de *função de Morse* se todos os seus pontos críticos são não degenerados.

comportamento da função em torno de um ponto regular, o interessante é que temos um análogo para os pontos críticos não degenerados dado pelo lema abaixo.

Vejamos um resultado famoso conhecido como lema de Morse o qual nos mostra a simplicidade de se trabalhar com pontos críticos não degenerados.

Lema 6.2 (Lema de Morse). *Seja a um ponto crítico não-degenerado de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Existe um difeomorfismo $\xi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ com $a \in \mathcal{W} \subset U$ e $0 \in V$ e $\xi(0) = a$ tal que*

$$f\xi(y) = f(a) - y_1^2 - \dots - y_i^2 + y_{i+1}^2 + \dots + y_n^2.$$

Demonstração. Suporemos que $a = 0$ e $f(a) = 0$. Pela fórmula de Taylor com resto integral temos que para um aberto pequeno o suficiente $\mathcal{W} \ni 0$,

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)x_i x_j \text{ onde } a_{ij}(x) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx) dt.$$

A matriz $A = (a_{ij}(x))$ é simétrica, temos que $f(x) = \langle A(x).x, x \rangle$. Definamos $A_0 = 1/2A(0)$. A função que leva as matrizes no seu quadrado

é um difeomorfismo local em torno da identidade. Assim podemos escrever $A(x) = A_0 B(x)^2$. Tendo em vista a simetria de A e A_0 obtemos que

$$A = A_0 \cdot B^2 = (B^T)^2 \cdot A_0$$

Tira-se assim que $B^2 = A_0^{-1} (B^T)^2 A_0 = (A_0^{-1} B^T A_0)^2$. Tomando o aberto \mathcal{W} menor se necessário temos que $B = A_0^{-1} B^T A_0$. Assim $f(x) = \langle A(x) \cdot x, x \rangle = \langle B(x)^T A_0 B(x) \cdot x, x \rangle = \langle A_0 B(x) x, B(x) x \rangle$

Finalizamos com duas observações, a primeira é que a função $\phi : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\phi(x) = B(x)x$ é um difeomorfismo local. Assim $f(x) = \sum a_{ij}(x) x_i x_j$, e a segunda é que podemos levar por um difeomorfismo f a forma esperada. \square

O interessante é que as funções de Morse podem parecer a primeira vista como muito particulares. Todavia o próximo teorema explicita que elas são extremamente comuns.

Teorema 6.6. *Seja $f : M \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, M uma variedade, e $f_a = f + a_1 x_1 + \dots + a_N x_N$, $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$. Então para quase todo a f_a é uma função de Morse.*

Demonstração. Provemos que se f for suave em um aberto de \mathbb{R}^k então para quase todas k -uplas em \mathbb{R}^k temos que $f_a = f + a_1 + \dots + a_k x_k$ é uma função de Morse.

Considere novamente a função $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$, $g = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k})$. A derivada $(df_a)_p = (\frac{\partial f_a}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_a}{\partial x_k}) = g(p) + a$

Portanto p é um ponto crítico de f_a se e somente se $g(p) = -a$. Suponha que $-a$ seja valor regular de g , então sempre que $g(p) = -a$ tem-se $(dg)_p$ não singular. Consequentemente todo ponto crítico de f_a é não degenerado e o teorema segue pelo teorema de Sard. \square

As funções de Morse ($f : M \rightarrow \mathbb{R}$) estão intimamente relacionadas com a topologia da variedade M como veremos a seguir. A referência [13] trata mais a fundo esta teoria do que trataremos aqui, já nas primeiras páginas é feito o estudo da função altura sobre o toro. Olha-se o toro “de pé” como mostra a figura.

E analisa-se o que acontece com a imagem inversa. É sabido que a imagem inversa de um valor regular são círculos, mas como eles se comportam ao passarem pelos valores críticos não degenerados que é o objeto de estudo, há uma “mudança no comportamento” da variedade. Este primeiro exemplo carrega muito da idéia do que é o estudo da teoria de Morse. Faremos agora um tratamento mais sistemático destas idéias que servem de motivação para o que faremos a seguir.

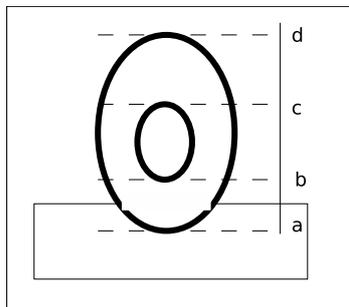


Figura 6: Toro

6.4 Teoria de Morse

O objetivo é entender melhor a estrutura de uma variedade M por meio de uma função de morse definida sobre ela. Consideremos que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função morse suave em uma variedade compacta M . Sejam $\{c_i\}_{i=1}^l$ os finitos pontos críticos de f , podemos supor também que $f(c_i) \neq f(c_j)$ sempre que $i \neq j$.

Sabemos que $M_a := f^{-1}(-\infty, a] \subset M$ é uma variedade compacta com bordo $\partial M_a = f^{-1}(a)$, o objetivo é entender o comportamento da variedade M_a a medida que variamos os valores de $a \in \mathbb{R}$. Este entendimento será dado pelos resultados que se seguem.

Proposição 6.2.

- Se $a \in \mathbb{R}$ está próximo do ponto de mínimo então M_a é difeomorfo ao disco fechado.
- Se $a \in \mathbb{R}$ está próximo do ponto de máximo então M_a é difeomorfo a $M \setminus$ disco aberto.

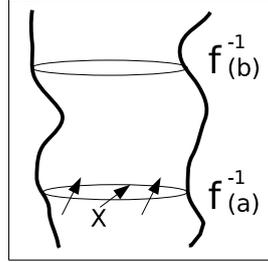
Demonstração. Por próximo queremos dizer, suponha $\alpha < a$ seja o mínimo de f então em $[\alpha, a]$ não há nenhum outro ponto crítico de f . Seja $p \in M$ tal que $f(p) = \alpha$, olhemos uma vizinhança coordenada em torno de p tal que a função f fica dada por $f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n x_i^2$, isto pelo lema de morse. Então nessas coordenadas vemos que $f^{-1}[\alpha, a]$ é um disco.

Para o segundo caso considere $-f$. Suponha que α e β sejam o mínimo e o máximo respectivamente de f então $-\beta$ torna-se o mínimo de $-f$ e assim $(-f)^{-1}[-\beta, a]$ é um disco e portanto $f^{-1}[\alpha, a] = ((-f)^{-1}[-\beta, a])^c$. \square

A seguir usamos campos gradientes para obter mais um resultado que nos ajudará com o nosso objetivo final. Este resultado mostra que nada de novo está acontecendo ao não passarmos por pontos críticos.

Proposição 6.3. Se $a < b$ e $[a, b]$ não contém nenhum valor crítico então M_a é difeomorfo a M_b

Demonstração. Considere o campo $X = \nabla f$. Sabemos que X aponta para a direção de maior crescimento da função f . Com isso como o campo X não se anula na região $f^{-1}([a, b])$ ele deve apontar em M_a para o interior do conjunto $f^{-1}([a, b])$. Sabemos que $X_t(x)$, a curva integral de X , só pode se acumular em pontos críticos. Portanto $X_t(x)$ não pode ficar preso na região $f^{-1}([a, b])$ e não pode sair por M_a portanto deve cruzar M_b .



Existe portanto um função $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ suave tal que $\phi > 0$ e definindo o campo $Y = \phi X$ temos que $Y_1(\partial M_a) = \partial M_b$. Temos de fato apenas uma inclusão mas raciocinando com $-X$ vemos que devemos ter a igualdade. Portanto M_a e M_b são difeomorfos. \square

Temos então um entendimento no que acontece neste percurso de a até b , explicitamente dado pelo corolário a seguir.

Corolário 6.1. $f^{-1}([a, b])$ é difeomorfo a $f^{-1}(a) \times [a, b]$.

Por fim, falta analisar o comportamento ao se passar por pontos críticos.

Colando uma λ -Asa. Olhemos f em coordenadas, tais que em torno do ponto crítico p , sendo α um valor crítico ou seja $f(p) = \alpha$, tenhamos

$$f = \alpha - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2$$

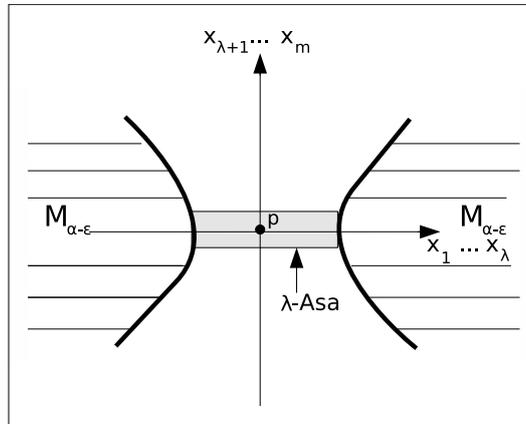
O conjunto $M_{\alpha-\epsilon}$ é dado pelo conjunto dos pontos tais que

$$-x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2 \leq -\epsilon^2$$

E definimos a λ -Asa como sendo o conjunto

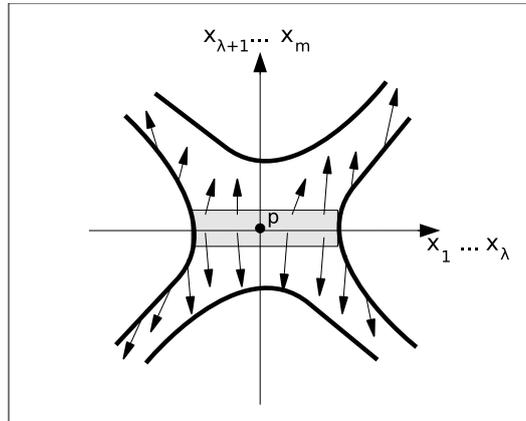
$$\begin{cases} -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2 \geq -\epsilon \\ x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2 \leq \delta \end{cases}$$

Teorema 6.7. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é o único valor crítico entre $[a, b]$ onde a e b são valores regulares de f então M_b é obtida de M_a colando-se uma λ -asa. Onde α é o índice do valor crítico α .



Demonstração. Primeiramente observamos que ao colarmos a $\lambda - Asa$ devemos colar esta asa um pouco deformada para que de fato $M_{\alpha-\epsilon} \cup Asa$ seja uma variedade diferenciável.

Novamente por um argumento análogo ao feito na proposição 6.3 teremos que a fronteira de $M_{\alpha-\epsilon} \cup Asa$ é mandada pelo campo gradiente a fronteira de $M_{\alpha+\epsilon}$.



Portanto a variedade $M_{\alpha-\epsilon} \cup Asa$ pode ser levada para a variedade $M_{\alpha+\epsilon}$. Provando assim o que queríamos. \square

Dada uma variedade M compacta tomamos uma função de morse cujos os valores críticos não coincidam e assim podemos *rastrear* o "crescimento" de M ao andarmos pela sua imagem. A medida que passamos por pontos críticos acrescentamos λ -asa com λ sendo o índice do ponto crítico. A proposição a seguir ilustra esta idéia.

Proposição 6.4. *Seja M uma variedade compacta e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de morse que possua apenas dois pontos críticos. Então M é difeomorfa a esfera S^n .*

Demonstração. M é compacta portanto f assume máximo e mínimo em p e q respectivamente. Seja $a = f(p)$ e $b = f(q)$. Para $\alpha \neq a, b$ não existe ponto crítico em $[a, \alpha]$ então vimos que M_α é um disco fechado e para b acrescentamos um disco. Assim M é a esfera S^n . \square

homotópica

7 Teoria do grau

Nesta seção estudamos o conceito de grau. Inicialmente estamos interessados em variedades variedade compactas.

Definição 7.1. Sejam M e N duas variedades orientadas de mesma dimensão. Onde M é compacta e $f : M \rightarrow N$ é uma função suave. Definimos o grau de f relativa ao valor regular y por:

$$gr(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} sgn(Df_x).$$

Na definição $sgn(Df_x)$ significa verificar se a derivada no ponto x preserva ou inverte orientação. Equivalentemente: verificar se o determinante da derivada da função f em coordenadas é positivo (preserva orientação) ou negativo (inverte orientação). As coordenadas devem ser olhadas utilizando um atlas positivo.

A definição 7.1 requer algumas observações. O grau assim definido depende do valor regular y . O próximo teorema mostra que de fato o $gr(f, y)$ independe do valor regular e pelo teorema de sard sabemos que toda aplicação possui valores regulares. Com isso poderemos definir o conceito de grau de uma função.

Teorema 7.2. *Sejam $f : M \rightarrow N$, M, N orientadas de mesma dimensão e M compacta e y, z valores regulares de f . Então $gr(f, y) = gr(f, z)$.*

A demonstração necessitará do seguinte lema.

Lema 7.1. *Sejam y e z pontos arbitrários de N , então existe um difeomorfismo $h : N \rightarrow N$ tal que $h(y) = z$. E mais h preserva a orientação.*

Demonstração. Primeiramente provemos localmente. Seja \mathcal{U} um aberto de uma vizinhança coordenada. Suponha que a carta seja da forma $\psi : \mathcal{U} \rightarrow B(3)$, onde $B(3)$ é a bola de raio três em \mathbb{R}^n . Dados quaisquer dois pontos $z, y \in \psi^{-1}(B(1))$, então existe um campo cuja trajetória iniciando em z intersecte y , e assim o fluxo de tempo t_0 (aquele que chega em y) é o difeomorfismo procurado. Isto é possível dado que trazemos os pontos para $B(1)$ e consideremos um campo com tal propriedade. O levamos para N multiplicando por uma bump function de modo que em $B(3) \setminus B(2)$ seja zero e em $B(1)$ seja um. Isso permite estender o campo a toda variedade.

Observe que o difeomorfismo construído acima preserva a orientação, por ser proveniente de um fluxo.

Dados $z, y \in N$, considere o conjunto

$$A = \{y \in N \mid \exists h : N \rightarrow N \text{ difeo. que preserva a orientação } h(x) = y\}.$$

Vejamus que $A = N$ provando ser aberto e fechado. Entretanto, note que para provar que é aberto ou fechado usamos o mesmo argumento acima.

Note que podemos tomar h um difeomorfismo preservando a orientação pois usamos o fluxo de campos. Como no tempo zero o fluxo é a identidade então o fluxo em qualquer tempo preserva a orientação. \square

Estamos aptos a fazer a prova do teorema.

Demonstração do Teorema 7.2. Seja ϕ como no Lema 7.1. Portanto o lema implica que o difeomorfismo ϕ preserva orientação e com isso pela definição 7.1 vê-se que $gr(f, z) = gr(\phi \circ f, z)$. Todavia temos que $gr(\phi \circ f, z) = gr(f, y)$. \square

Podemos agora definir o grau de uma função.

Definição 7.3. Sejam M e N duas variedades de mesma dimensão. Se M é compacta e $f : M \rightarrow N$ uma função suave, definimos o grau de f por $gr(f) = gr(f, y)$ para algum valor regular y .

Fica claro da definição que toda função que não seja sobrejetiva tem grau igual a zero.

homeomorfismo. Orientabilidade de variedades topológicas.

Proposição 7.1. Se $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hiperfície compacta, então $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ possui duas componentes conexas, uma limitada e outra ilimitada.

Demonstração. Primeiramente vejamos que possui pelo menos duas componentes conexas. Suponha por absurdo que não. Considere a função $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ de forma que toque apenas uma vez na subvariedade M e que seja de maneira transversal. Portanto o número de interseção é ± 1 . No entanto podemos transladar a imagem desta função de modo a não intersectar a hiperfície, neste caso esta função teria número de interseção igual a zero. O que é absurdo por ser homotópica a anterior.

Agora para ver que existem apenas duas componentes conexas usamos a vizinhança tubular. Dada qualquer ponto podemos sempre ligá-lo a um ponto que esteja de “um lado ou de outro da hiperfície. Note que uma dessas componentes deve ser limitada, caso contrário haveria um caminho ligando as duas sem passar por M . \square

Exemplo 7.4. Seja M^n uma variedade compacta, então existe uma aplicação $f : M \rightarrow S^n$ de grau igual a 1.

Usa aplicação exponencial. Pega um ponto $p \in M$, considera a aplicação exponencial, leve o ponto p ao polo norte e caminhando pela exponencial vá até o polo sul, depois estenda a função como constante em sobre o polo sul.

Exercício 7.1. Seja M^n uma variedade compacta, então existe uma função de $f : M \rightarrow S^n$ de grau zero e sobrejetora.

Exercício 7.2. Seja M^n uma variedade compacta, então existe uma função de $f : M \rightarrow S^n$ de grau n para todo $n \in \mathbb{N}$.

7.1 Homotopia

Façamos um breve desenvolvimento da teoria de homotopia para com isso podermos entender mais um pouco sobre o conceito de grau de uma função.

Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ funções e X, Y conjuntos quaisquer. Dizemos que f e g são homotópicas se existem uma função contínua

$$F : X \times I \rightarrow Y ; I = [0, 1]$$

$$F(x, 0) = f(x) ; F(x, 1) = g(x).$$

Dizemos que F é uma **homotopia** entre f e g . Costumamos chamar a segunda coordenada da homotopia F por *tempo*. Ou seja uma homotopia entre as funções f e g é uma deformação das funções tais que no tempo zero é f e transcorrido uma unidade de tempo chegamos a g .

Exercício 7.3. Prove que *ser homotópico* é uma relação de equivalência.

Exercício 7.4. Se $p < n$, então um aplicação suave $M^n \rightarrow S^p$ é homotópica a uma constante.

Exercício 7.5. O grau da aplicação antípoda $A : S^n \rightarrow S^n$, $A(x) = -x$ é $(-1)^{n+1}$.

Exercício 7.6. Se $S^n \rightarrow S^n$ tem grau diferente de $(-1)^{n+1}$, então a aplicação possui um ponto fixo.

Uma **homotopia diferenciável** entre duas funções $f, g : M^m \rightarrow N^n$ sendo M e N variedades é uma homotopia H sendo que H é diferenciável, dizemos portanto que f e g são diferenciavelmente homotópicas. Pode-se checar também que ser homotopicamente diferenciável é uma relação de equivalência. Para checar que é uma relação de equivalência a propriedade de transitividade aparentemente poderia causar problema para se fazer a colagem, no entanto usando uma bump-function “no tempo” podemos sempre supor que a homotopia é constante em uma vizinhança dos extremos, e assim pode-se colar sem problema.

Teorema 7.5. *Seja $f : M \rightarrow N$ então existe uma vizinhança $\mathcal{V}(f)$ de f na topologia $C^0(M, N)$ tal que, se $g \in C^0(M, N)$ então f e g são continuamente homotópicas.*

Demonstração. Pelo discutido na seção 5.1 podemos considerar $N \subset \mathbb{R}^q$. Seja $V_\delta(N)$ uma vizinhança tubular (seção 6.1) de N . Considere uma vizinhança fundamental pequena o suficiente de f para que toda função, g , desta vizinhança tenha a propriedade que $g(x) \in V_\delta(N)$ e a reta que liga $f(x)$ a $g(x)$ esteja contido em $V_\delta(N)$. Considerando $\pi : V_\delta(N) \rightarrow N$ a projeção associada a projeção tubular $V_\delta(N)$. Assim definimos a função

$$F : M \times I \rightarrow N$$

$$F(x, t) = \pi \circ [(1 - t)f(x) + tg(x)]$$

É fácil ver que a função F é de fato uma homotopia entre f e g , provando exatamente o que queríamos. \square

Exercício 7.7. Prove o Teorema 7.5 sem supor que $N \subset \mathbb{R}^q$.

Dica: veja N como uma variedade Riemanniana. Se g é suficientemente próxima da f , então existe uma única geodésica ligando $f(x)$ a $g(x)$ em tempo 1. Utilize a função exponencial para definir a homotopia.

Teorema 7.6. *Seja $f, g : M \rightarrow N$ suaves. Se f e g são continuamente homotópicas, então são suavemente homotópicas.*

Demonstração. Começamos observando que na prova do Teorema 7.5 é direto verificar que se as funções f e g fossem suaves a homotopia entre elas seria suave devido a fórmula explícita da homotopia. Tendo isto em mente, considere $H : M \times I \rightarrow N$ uma homotopia entre f e g . Considere uma aproximação suave G , de H .³ Tomando esta aproximação próxima o suficiente temos que as funções $G(x, 0)$ e $G(x, 1)$ estejam próximas o suficiente de f e g para usarmos o Teorema 7.5 e pelo observado no início essas funções seriam diferenciavelmente homotópicas. Sendo a homotopia uma relação de equivalência obtemos, portanto, que f e g são diferenciavelmente homotópicas. \square

Como isso podemos fazer a seguinte definição.

Definição 7.7. Seja $f : M \rightarrow N$ uma função contínua, com M compacta e ambas variedades orientadas. Definimos o $gr(f) := gr(g)$ para alguma g suave homotópica a f .

Os teoremas acima garantem a boa definição feita acima.

e 7.6. Na demonstração desses resultados fizemos uso da vizinhança tubular, no entanto existem outras demonstrações desses teoremas que envolvem fatos da geometria diferencial. métricas riemannianas na seção 3.8 é justo fazer um rápido comentário sobre como seria a demonstração por meio da geometria diferencial. introduzir o conceitos das geodésicas que são os caminhos mais curtos entre dois pontos. Voltando a demonstração do Teorema 7.5 vemos que em um determinado momento fizemos uma homotopia linear. A geometria diferencial vem substituir exatamente este passo. Para ajudar na intuição tenha em mente o Teorema 7.5 com S^n e a projeção da vizinhança tubular sendo simplesmente a projeção radial. Com isso a homotopia que fazemos lá é nada mais que ligar os pontos por $f(x)$ e $g(x)$ por geodésicas. No caso geral a geometria diferencial me garante que eu poderei

³Não vimos aproximação por funções suaves definidas em variedades com bordo, então por questões técnicas pode-se considerar que a homotopia H está definida em um tempo maior que 1 e menor que zero e constante numa vizinhança desses tempos extremos.

fazer isto de forma diferenciável e com a ajuda de uma função conhecida como a exponencial (no sentido que é dado na geometria diferencial) podemos fazer uma demonstração intuitivamente parecida com a que fizemos só que usando conceitos da geometria diferencial.

mencionados acima serão tratados na seção ?? assim como uma nova demonstração do teorema da vizinhança tubular só que em uma versão mais intrínseca, assim como uma vizinhança tubular para variedades com bordo.

7.1.1 Aplicação: Variedades Topológica

Quando definimos orientação em uma variedade, pela Proposição 3.5 vemos que havia a necessidade de se considerar derivadas. Com isso aparentemente não conseguiríamos fazer uma extensão do conceito de orientabilidade para variedades topológicas. No entanto a teoria que desenvolvemos nos permite estender a definição de orientabilidade. Temos da definição de grau que o grau de um difeomorfismo é 1 ou -1. Logo um difeomorfismo preserva orientação se, e somente se tem grau igual a 1. O que nos intui a fazer a seguinte definição.

Definição 7.8. Seja M uma variedade topológica. Dizemos que M é *orientável* se existe um atlas \mathcal{A} tal que as mudanças de coordenadas tem grau igual a 1.

7.2 Funções Próprias

De fato na Definição 7.3 a necessidade de tomarmos M compacta é para que tenhamos $f^{-1}(y)$ um conjunto finito. Assim podemos olhar para uma classe maior de funções se elas possuírem a propriedade de também terem a imagem inversa de um valor regular um conjunto finito. As funções procuradas serão chamadas de próprias como se confere na definição abaixo.

Definição 7.9. Sejam $f : M \rightarrow N$, uma função C^1 entre as variedades M e N orientadas de mesma dimensão (podendo ser não compactas), dizemos que f é uma *função própria* se a imagem inversa de todo compacto de N é um compacto em M .

Esta definição estende o caso anterior já que toda função continua definida em um compacto é própria. Com isso fica bem definida a noção de **grau de uma função própria** cuja definição estende naturalmente.

Exercício 7.8. Reprovar todos os teoremas de grau para o caso de funções próprias.

Teorema 7.10. O conjunto das funções próprias em $C^r(M, N)$ é aberto.

Provar
melhor

Demonstração. Sejam $f \in C^r(M, N)$ uma função própria e $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$, com L_i compacto, $L_i \subset \text{int}.L_{i+1}$. Assim $M_i = f^{-1}(L_i)$ é compacto e $M_i \subset f^{-1}(\text{int}.L_{i+1}) \subset M_{i+1}$. Com isto basta considerar uma vizinhança fundamental $\mathcal{V}(f) = \mathcal{N}^r(f; \Psi, \Phi, K, \epsilon)$ de f . Como de costume mantemos a notação que sempre usamos ao falar da vizinhança $\mathcal{N}^r(f; \Psi, \Phi, K, \epsilon)$. Lembrando que por definição da vizinhança temos que $g \in \mathcal{V}(f)$ tenha-se $g(K_i) \subset V_i$. Ou seja, ao se tomar a imagem inversa de um compacto por g ele será coberto por uma quantidade finita de vizinhanças $\text{int}.K_i$ e portanto sendo fechado e limitado será compacto. \square

Exemplo 7.11. Se N é compacto e M é não compacto temos que o conjunto das funções próprias de M em N é vazio. Pois a imagem inversa do compacto N é sempre M que não é um compacto.

Exercício 7.9. Seja M uma variedade qualquer. O conjunto das aplicações próprias de $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é não vazio.

8 Teoria de Interseção

Retornemos a teoria desenvolvida na seção 5.1 com o intuito de estender a teoria de grau. Considere o seguinte contexto. X, Y e Z são variedades orientadas, X compacta, Z uma subvariedade de Y satisfazendo $\dim(X) + \dim(Z) = \dim Y$.

Definição 8.1. Seja $f : X \rightarrow Y$ transversal a Z , com a notação acima. Definimos o *número de interseção* $I(f, Z)$ como sendo a soma da orientação dos pontos em $f^{-1}(Z)$.

Sabemos que $f^{-1}(Z)$ são pontos, finitos, pois X é compacta e sendo $f \bar{\cap} Z$ sabemos que $f^{-1}(Z)$ é uma subvariedade de X de codimensão igual a dimensão de X . Na definição acima definimos a orientação de um ponto $x \in f^{-1}(Z)$ por $+1$ se $f(x) = z$ e

$$df_x TX_x \oplus TZ_z = TY_z$$

forma, nessa ordem, e damos a orientação de -1 caso

$$TZ_z \oplus df_x TX_x = TY_z.$$

Teorema 8.2. Se $X = \partial W$, W compacto e $f : X \rightarrow Y$ suave se estende a W , então $I(f, Z) = 0$.

Demonstração. Chamemos a extensão de f por F , podemos assumir $F \bar{\cap} Z$. Como $f^{-1}(Z)$ são pontos, $F^{-1}(Z)$ é uma variedade um dimensional. Todavia sabemos classificar as variedades compactas um dimensionais. Nos interessa apenas as componentes conexas homeomorfas a um segmento de reta, note que $\partial F^{-1}(Z) = f^{-1}(Z)$. No entanto neste caso quando pego uma dessas componentes e olho o seu bordo temos que a sua orientação deve estar invertida. Isto porque Com isso se cancelam dois a dois o que dá o resultado. \square

Acima foi usado o fato de orientação de variedade com bordo, veja o que eu escrevi nas Anotações. E explicar melhor essa coisa de inverter a orientação

Provemos a invariância, por homotopia, do número de interseção.

Teorema 8.3. Funções homotópicas possuem o mesmo número de interseção. Supondo ambas transversais a uma variedade Z fechada.

Demonstração. Suponha f_0 e f_1 funções homotópicas e transversais a Z . Se $F : I \times X \rightarrow Y$ é uma homotopia entre as funções f_0 e f_1 . Com isso temos pelo teorema provado anteriormente que $I(\partial F, Z) = 0$. Mas temos também que $\partial(I \times X) = (+\{0\} \times X) \cup (-\{1\} \times X)$. E com isso temos que $0 = I(\partial F, Z) = I(f_1, Z) - I(f_0, Z)$. \square

A de-
finição
está ruim

Observação

melhorar
prova

8.1 Índice de Campos e Característica de Euler

O estudo de campos de vetores em variedades é capaz de nos fornecer muitas propriedades topológicas interessantes como veremos ao longo desta seção. Os campos aqui tratados serão ao menos C^1 .

Dizemos que x_0 é uma *singularidade simples* do campo $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se $X(x_0) = 0$ e $DX(x_0)$ é um isomorfismo.

Definição 8.4. Definimos o índice de um campo em uma singularidade isolada x_0 como sendo o grau da aplicação

$$f_\epsilon : \begin{cases} S^{n-1} & \rightarrow & S^{n-1} \\ x & \mapsto & \frac{X(x_0 + \epsilon x)}{\|X(x_0 + \epsilon x)\|} \end{cases}$$

para ϵ suficientemente pequeno de forma que $B(x_0, \epsilon)$ contenha apenas a singularidade x_0 .

Exercício 8.1. A definição 8.4, está bem definida. Isto é, independe do ϵ (pequeno).

Provemos um lema simples que será usado não só na demonstração da próxima proposição como em outras partes do texto.

Lema 8.1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e uma função suave $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(0) = 0$. Então existe funções suaves $g_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ com $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ e*

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x).$$

Demonstração. Temos que $f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(tx) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$. Definimos $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$, o que termina portanto a demonstração. \square

Provemos agora um resultado que facilita a nossa manipulação da definição de índice de um campo.

Proposição 8.1. *Seja x_0 singularidade simples de um campo $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Seja ϵ suficientemente pequeno de forma que a função f_ϵ esteja bem definida. Então vale a seguinte igualdade:*

$$\mathbf{Ind}_{x_0} = \begin{cases} +1 & \text{se } \det DX(x_0) > 0 \\ -1 & \text{se } \det DX(x_0) < 0 \end{cases}$$

Demonstração. Sem perda de generalidade suponha que $x_0 = 0$. Com isso podemos construir a seguinte homotopia entre o campo X e a sua derivada por

$$f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n, f(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{t}X(tx) & \text{se } 0 < t \leq 1 \\ DX(0)x & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

Para ver que esta homotopia é suave basta usarmos o lema acima para o campo X no lugar de f .

Quando a derivada preservar a orientação podemos levá-la homotopicamente a identidade sem que a homotopia deixe de ser isomorfismos. No outro caso podemos levar a reflexão com relação, digamos, a primeira coordenada. E assim o resultado segue. \square

O próximo lema é o que permite a definição de índice de um campo em uma variedade.

Lema 8.2. *Seja X um campo definido em U e seja Y o push-forward do campo por algum difeomorfismo ϕ . Então temos que $\mathbf{Ind}_{x_0} X = \mathbf{Ind}_{\phi(x_0)} Y$*

Demonstração. Temos portanto, $Y \circ \phi(x) = D\phi(x).X(x)$ derivando no ponto x_0 , $DY_{\phi(x_0)}.D\phi(x_0) = D^2\phi(x_0)X(x_0) + D\phi(x_0).DX(x_0)$. Implicando portanto que

$$DY_{\phi(x_0)} = D\phi(x_0).DX(x_0).(D\phi(x_0))^{-1}$$

Com isso o sinal de $D\phi(x_0)$ e sua inversa se cancelam. Provando o lema. \square

Com isso podemos definir.

Definição 8.5. *Seja X um campo de vetores em uma variedade M . Seja p_0 uma singularidade isolada (o mesmo que na definição 8.4) então definimos o índice de X em p_0 por $\mathbf{Ind}_{p_0} X = \mathbf{Ind}_{\phi(p_0)} Y$, onde Y é o push-forward do campo X por uma carta em torno de p_0 .*

Agora uma definição importante e em seguida veremos que ela está bem definida.

Definição 8.6. Definimos a *característica de Euler* de uma variedade M como sendo $\chi(M) = \sum_{x \in X^{-1}} \text{Ind}_x X$, onde X é qualquer campo de vetores definido sobre a variedade M . (Vide proposição a seguir).

Primeiramente vemos que dados dois campos de vetores X e Y em uma variedade M eles são sempre homotópicos, de fato existe uma homotopia linear entre eles

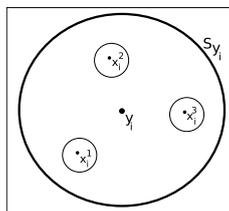
$$F : M \times I \rightarrow TM, \quad F(x, t) = (1 - t)X(x) + tY(x).$$

Pela definição acima vemos que podemos devido a arbitrariedade do campo na superfície calcular a característica de Euler de uma superfície da maneira que nos parecer mais conveniente, no entanto é preciso antes provar a próxima proposição.

Proposição 8.2. *A característica de Euler encontrada na Definição 8.6 está bem definida.*

melhorar a prova

Demonstração. Seja $X : M \rightarrow TM$ um campo de vetores possuindo singularidades isoladas apenas. Então tome $M_0 = \{(x, v) \in TM \mid v = 0\}$ temos que $X \bar{\cap} M_0$ e o Teorema 8.3 me garante exatamente a boa definição de $\chi(M)$ quando consideramos apenas campos transversais a M_0 . No entanto dado um campo Y apenas com singularidades isoladas faz sentido devemos ver que a soma de seus índices é a mesma de um campo que seja transversal a M_0 . Para isto basta portanto considerarmos um campo $X \bar{\cap} M_0$ suficientemente próximo de Y . Seja y_i singularidades isoladas de Y e S_{y_i} uma esfera tal que em seu interior possua apenas a singularidade y_i . Considere X um campo com singularidades isoladas próximo o suficiente de Y de modo que suas singularidades isoladas caiam sempre dentro de algum S_{y_i} . Mas pelo Teorema 8.2, temos que a função $f_\epsilon(y_i)$ possui grau que é a soma dos índices das singularidades de X que estão em S_{y_i} .



□

8.1.1 Cálculo da Característica de Euler

Podemos agora calcular a característica de Euler de algumas variedades. O resultado a seguir será útil.

Proposição 8.3. *Existe um campo de vetores suaves na esfera sem singularidade S^n se, e somente se, n é ímpar.*

Demonstração. (\Rightarrow) Se $X : S^n \rightarrow TS^n$ é campo sem singularidade então considere a seguinte função $f : S^n \rightarrow S^n$, $f(x) = x + X(x)/\|x + X(x)\|$ que é homotópica a identidade sendo a homotopia dada por $(x, t) \rightarrow x + tX(x)/\|x + tX(x)\|$. Por outro lado f é homotópica a menos a identidade, sendo homotopia dada por

$$F : S^n \times I \rightarrow S^n$$

$$F(x, t) = tf(x) - (1-t)x/\|tf(x) - (1-t)x\|$$

. Logo por um lado o grau de f é igual a 1 e por outro lado é igual a $(-1)^{n+1}$ portanto n é ímpar.

(\Leftarrow) Podemos explicitar um campo por

$$X(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = (-x_2, x_1, \dots, -x_{n+1}, x_n)$$

Fica provado então a proposição. □

• **A esfera S^n**

Colocar o campo

A proposição acima nos mostra que $\chi(S^n) = 0$ se n é ímpar. De fato $\chi(S^n) = 2$ para n par, pois é possível contruir um campo que possui duas singularidades no polo sul e polo norte ambas com índice igual a 1.

• **Variedade de dimensão ímpar**

Se M^m é variedade de dimensão ímpar. Então $\chi(M) = 0$. De fato, como $\chi(M)$ independe do campo que pegamos para calcular, tome um campo qualquer X possuindo singularidades isoladas apenas e considere $-X$. Considere p uma singularidade de X (e portanto de $-X$) para calcular o $Ind_p X$ calculamos o sinal do determinante do push-forward do campo por uma carta e usando a mesma carta para calcular o sinal do determinante relativo ao push-forward do campo $-X$ temos que o sinal fica multiplicado por $(-1)^m$. Assim tem-se que $\sum Ind_p X = \sum Ind_p(-X) = (-1)^m \sum Ind_p X$ e portanto como m é ímpar obtemos $\chi(M) = \sum Ind_p X = 0$.

• **Variedades desconexas**

Se $M^m = M_1^m \cup \dots \cup M_k^m$, então claro que $\chi(M) = \chi(M_1) + \dots + \chi(M_k)$.

• **O produto cartesiano de variedade:** $\chi(M \times N) = \chi(M)\chi(N)$

Basta pegar dois campos X e Y um em M e o outro em N e contar o índice nas singularidades, indiquemos os zeros de X por p e os de Y por q .

$$\chi(M \times N) = \sum_p \sum_q Ind_{(p,q)}(X \times Y) = \sum_p Ind_p \chi(N) = \chi(M)\chi(N)$$

- **Espaços de recobrimento**

Seja $\pi : M \rightarrow N$ um recobrimento de k -folhas. Vejamos que assim $k\chi(M) = \chi(N)$. De fato pois dado um campo em N tendo em vista que π é localmente um difeomorfismo podemos induzir o campo de N em M . Portanto podemos calcular com facilidade que $\chi(\mathbb{P}^n) = 1$ se n for par e $\chi(\mathbb{P}^n) = 0$ se n for ímpar.

- **Superfície Compacta**

Vejamos que uma superfície compacta de dimensão 2, M^2 de gênero g possui $\chi(M^2) = 2 - 2g$. Já sabemos que para $g = 0$, a esfera, temos que $\chi(M) = 2$ o caso de $g = 1$, o toro $= S^1 \times S^1$, temos então pelo que discutimos já anteriormente $\chi(S^1 \times S^1) = \chi(S^1)\chi(S^1) = 0 \cdot 0 = 0$. No caso do bitoro também podemos calcular que $\chi(\text{bitoro}) = -2$ considerando o bitoro “em pé” e sobre ele analisando o campo de vetores dado pelo gradiente da função altura. De fato este procedimento é geral. Para mais vide [9].

fácil, de se ver que $\chi(M^2) = 2 - 2g$. Vimos que o bitoro tem característica de euler igual a -2 , sendo ele soma conexa de dois toros quer dizer que cada toro contribui com -1 . Dada uma variedade de gênero g fazemos a soma conexa com um toro. Para construir um campo nesta soma conexa olhamos o campo X sobre a variedade inicial e tiramos um disco em que o campo é transversal ao bordo do disco e não tenha singularidades no interior, colamos este campo no toro usando o teorema colar e olhando então para $-X$ o campo assim é colado naturalmente.

- **Variedade não orientável**

Como calculamos a características de Euler para algumas variedade orientáveis, como sabemos que toda variedade não orientável M possui um recobrimento duplo orientável \widetilde{M} temos portanto que $\chi(M) = \frac{1}{2}\chi(\widetilde{M})$.

8.2 Teoria de Ponto Fixo

Estamos interessados em estudar os pontos fixos de uma função definida em uma variedade compacta X . Considere a função $f : X \rightarrow X$ a busca pelos seus pontos fixos consiste em olhar as interseções do gráfico de f em $X \times X$ com a diagonal $\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$.

Na Definição 8.1 definimos o número $I(f, Z)$ onde f era uma função e Z uma variedade (subvariedade no caso). No entanto podemos também fazer uso da notação $I(X, Y)$ se X e Y são subvariedade de uma variedade maior Z . Com isso quando escrevemos $I(X, Y)$ queremos dizer $I(i, Y)$ sendo $i : X \rightarrow Z$ a inclusão. Considere $f : X \rightarrow Y$ e $g : Z \rightarrow Y$ funções suaves em variedades. Dizemos que f e g são transversais $f \overline{\cap} g$ se

$$df_x TX_x + dg_z TZ_z = TY_y$$

$$f(x) = y = g(z)$$

É claro que também podemos facilmente definir $I(f, g)$ no caso em que $df_x TX_x \oplus dg_z TZ_z = TY_y$ como sendo a contribuição dos pares (x, z) tendo sinal $+1$ se a soma der a orientação de TY_y e -1 caso contrário.

Definição 8.7. O número de Lefschetz de $f : X \rightarrow X$, $L(f)$ é por definição $I(\Delta, \text{graph}(f))$. Onde $\text{graph}(f)$ é o gráfico de f .

já podemos retirar da definição um resultado de existência de ponto fixo. Suponha que $f : X \rightarrow X$ tenha número de Lefschetz diferente de zero, então f deve ter um ponto fixo. De fato, caso não tivesse ponto fixo teríamos $L(f) = 0$.

Proposição 8.4. $I(f, g) = (-1)^{(\dim X)(\dim Z)} I(g, f)$

Demonstração. Olhando

$$df_x TX_x \oplus dg_z TZ_z = TY_y$$

$$dg_z TZ_z \oplus df_x TX_x = TY_y$$

Escrevendo as bases e fazendo-se $\dim X \cdot \dim Z$ transposições levamos uma base na outra. \square

Invariância Homotópica. Afiramos que $I(\Delta, \text{graph}(f))$ permanece inalterado se ao invés consideramos $I(\Delta, \text{graph}(g))$ com g homotópica a f . De fato olharmos a proposição acima e em seguida usamos o Teorema 8.3.

Por fim, podemos olhar o número de Lefschetz como sendo uma soma.

$$L(f) = \sum_{f(x)=x} L_x(f)$$

No caso em que f é transversal a diagonal. Dada uma função qualquer sempre podemos encontrar uma função próxima o suficiente que seja transversal a diagonal. Com isso $L_x(f)$ é o sinal do número de interseção no ponto fixo x .

Se f for tal que $\text{graph}(f) \bar{\cap} \Delta$ em (x, x) , então como o espaço tangente de $\text{graph}(f)$ em $T_x M \times T_x M$ é o gráfico da função $Df_x : T_x M \rightarrow T_x M$. Portanto por uma questão de dimensão teremos

$$\text{graph}(Df_x) \oplus T_{(x,x)} \Delta = T_x M \times T_x M$$

Podemos agora enunciar um resultado útil, tendo em vista que fornece uma outra forma de se calcular o número de Lefschetz.

Proposição 8.5. O sinal de $L_x(f)$ é o $+1$ se $Df_x - I$ preserva orientação e -1 se inverte orientação.

Demonstração. Denotemos, $A = Df_x$ e $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base positiva de $T_x M$.

$$\{(v_1, v_1), \dots, (v_n, v_n)\} \text{ é base positiva de } T_{(x,x)} \Delta$$

Como o gráfico de um função é uma variedade orientada cuja orientação é a natural dada pela parametrização que cobre toda a variedade temos que

$$\{(v_1, Av_1), \dots, (v_n, Av_n)\} \text{ é base positiva de } T_{(x,x)} \text{graph}(f)$$

Portanto o sinal de $L_x(f)$ é o sinal da base

$$\{(v_1, v_1), \dots, (v_n, v_n), (v_1, Av_1), \dots, (v_n, Av_n)\}$$

olhada no espaço tangente de $M \times M$ com a orientação produto. Esta base possui a mesma orientação que as seguintes bases

$$\{(v_1, v_1), \dots, (v_n, v_n), (v_1, (A - I)v_1), \dots, (0, (A - I)v_n)\}$$

$$\{(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (v_1, (A - I)v_1), \dots, (0, (A - I)v_n)\}$$

$$\beta \times 0, 0 \times (A - I)\beta$$

Que pela orientação produto tem a sinal que $\text{sinal}\beta \cdot \text{sinal}(A - I)\beta = \text{sinal}(A - I)$. Como queríamos mostrar. □

A proposição acima permite relacionar a característica de Euler de uma variedade M ao número de Lefschetz relativo a função identidade.

Proposição 8.6. *Seja M uma variedade compacta, então $I(Id, Id) = \chi(M)$. Onde $Id : M \rightarrow M$ é a função identidade.*

Demonstração. Considere um campo X em M com singularidades isoladas. Sendo $\phi_t(x)$ o fluxo associado ao campo X sabemos que ϕ_t é homotópica a identidade, já que $\phi_0 = Id$. Portanto a invariância homotópica implica que basta mostrar que $\xi(M) = I(\Delta, \phi_t)$.

Basta então vermos que $L_x(\phi_t) = Ind_x X$. Mas vimos acima que $L_x(\phi_t) = D\phi_t(x) - x = X(\phi_t(x)) - x$. Olhemos em um pequeno anel em torno de p e para um t pequeno o suficiente, $X(\phi_t(x)) - x$ é linearmente homotópica a $X(x)$. Assim o sinal de $X(\phi_t(x)) - x$ é de fato o grau de $X(\phi_t(x))$, que como vimos é exatamente $Ind_x X$. □

9 Teorema de Hopf

Na seção 7 vimos que o grau é um invariante homotópico. Existe um caso particular em que de fato o grau é o único invariante homotópico. Este resultado é conhecido como teorema de Hopf apresentado nesta seção. Iniciamos com um teorema sobre homotopia e que será usado também na demonstração do Teorema de Hopf.

Proposição 9.1. *Sejam W uma variedade e N uma variedade com bordo. Se $f, g : \partial N \rightarrow W$ continuas, homotópicas e g se estende continuamente a N , então f também se estende em N .*

Demonstração. Seja $G : N \rightarrow W$ a extensão de g . Então existe extensão \tilde{G} de g tal que olhando um colar $\partial N \times [0, \infty)$ do bordo de N temos $\tilde{G}(x, t) = g(x)$ se $t \leq 1/4$. Isso é possível por um argumento usando bump-function (considere a igualdade de g até o tempo 1 e depois cola). Assumimos também que $\tilde{G}(x, t) = G(x, t)$ se $t \geq 1/2$.

Para estender f , considere H a homotopia entre f e g , $H_0 = f$ e $H_1 = g$. Definimos $F(x, t) = H(4t, x)$ para $t \leq 1/4$ e $F(x, t) = \tilde{G}(x, t)$ para $t \geq 1/4$, e fora do colar da forma que construímos se estende naturalmente com G . \square

Mais um resultado que precisaremos e que também é interessante segue abaixo.

Proposição 9.2. *Seja $\pi : E \rightarrow [0, 1]$ um fibrado vetorial. Então o fibrado é trivial.*

Ver

Demonstração. A prova é simples. Lembremos antes que para falar que um fibrado é trivial é provar que existe um difeomorfismo F que faz o seguinte diagrama comutar.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & [0, 1] \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_1 \\ & [0, 1] & \end{array}$$

No entanto Isto equivale a provar que existe $X_1, \dots, X_n : [0, 1] \rightarrow E$ seções tal que $X_1(t), \dots, X_n(t)$ formam uma base de $E_t = \pi^{-1}$. Seja $\tau = \sup\{s \geq 0, \text{ tal que existem tais campos } X_i : [0, s] \rightarrow E\}$, queremos ver que $\tau = 1$. Claro que $\tau > 0$ já que temos uma trivialização local. Vejamos como podemos estender, existe uma trivialização local $\Phi : \pi^{-1}(\tau - \epsilon, \tau + \epsilon) \rightarrow (\tau - \epsilon, \tau + \epsilon) \times \mathbb{R}^n$. Assim levamos as seções em $\pi^{-1}(\tau - \epsilon, \tau + \epsilon)$ para seções em $(\tau - \epsilon, \tau + \epsilon) \times \mathbb{R}^n$ por Φ e assim estendendo os ΦX_i podemos levá-los de volta fazendo assim uma extensão dos X_i , absurdo com a hipótese de τ ser um supremo. Logo $\tau = 1$, ficando assim demonstrado. \square

Como uma aplicação deste resultado temos que dados quaisquer dois pontos p e q em uma variedade existe uma carta $\phi : U \rightarrow V$ com U conexo contendo p e q . Tome um caminho adequado que contenha os pontos e considere a vizinhança tubular deste caminho, o que gera um fibrado sobre a curva pela proposição acima segue o que queríamos.

Lema 9.1. *Seja W^{n+1} uma variedade com bordo orientada, N uma variedade orientada e $K \subset W$ um arco em W que toca o bordo ∂W de W transversalmente. Considere uma aplicação $f : V \rightarrow N$ onde V é um aberto do bordo ∂W e f é tal que $\partial K = \{x_1, x_2\} = f^{-1}(y)$ com y valor regular. Se f preserva orientação em k_1 e inverte em k_2 , então existem uma vizinhança $W_0 \subset W$ de K e uma função $g : W_0 \rightarrow N$ tais que:*

- $g = f$ em $W_0 \cap V$;
- y é um valor regular de g ;
- $g^{-1}(y) = K$.

Demonstração. Podemos supor $(N, y) = (\mathbb{R}^n, 0)$. Sejam x_0 e x_1 os pontos finais do compacto K , a vizinhança tubular da variedade K nos permite definir um fibrado vetorial sobre um intervalo, pela Proposição 9.2 podemos supor a vizinhança de K , por cartas, da forma $I \times \mathbb{R}^n$. Caminhando um pouquinho sobre I transformo a f na sua derivada. Pela definição de orientação induzida no bordo isto quer dizer que como x_0 e x_1 possuem sinais trocados, então o determinante da derivada de f em x_0 é igual ao determinante de f em x_1 tem o mesmo sinal o que implica que existe um caminho ligando as duas matrizes. Então utilizo este caminho para terminar de definir g em $I \times \mathbb{R}^n$. \square

Provemos, portanto, o **Teorema de Hopf**.

Teorema 9.1. *Seja N um variedade compacta orientável de dimensão $n+1$ e $f : \partial N \rightarrow S^n$ continua.*

f se estende continuamente a $F : N \rightarrow S^n$ se, e somente se, $\text{grau}(f) = 0$.

Demonstração. (\Rightarrow) É caso particular do Teorema 8.2.

(\Leftarrow) Pela proposição acima podemos supor que f é suave. Como o grau é zero então $f^{-1}(y)$ de um valor regular tem uma quantidade par de pontos. Ligamos esses pontos por caminhos que sejam subvariedades de W e que sejam transversais ao bordo de W e também disjuntos. Para fazê-los disjuntos é simples no caso de $\dim W \geq 3$ pois uma leve perturbação os torna disjuntos e no caso de $\dim W = 2$ nos pontos de interesse (que posso tomar sendo transversal) apenas fazemos a mudança que ilustra a figura 7.

Denotemos tais arcos por K_i , usando o lema acima nestes K_i obtemos uma vizinhança $W_0 \subset W$ de $\cup K_i$ e uma função $g : W_0 \rightarrow S^n$ que coincide com f em $\partial W_0 \cap \partial N$, tendo y como valor regular e tal que $g^{-1}(y) = \cup K_i$.

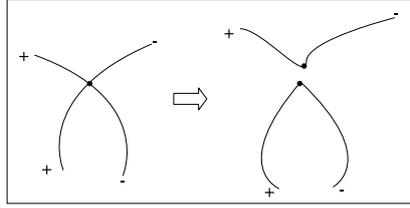


Figura 7: Eliminando cruzamentos

Seja $U \subset W$ uma vizinhança de $\cup K_i$ tal que passando o fecho ainda permaneça em W_0 . Assim as funções f e g dão origem a função

$$h : X = Fr.U \cup (\partial W - U) \rightarrow S^n - y.$$

Onde $h(x) = f(x)$ ou $g(x)$ dependendo de onde estejam definidas, note que h está bem definida.

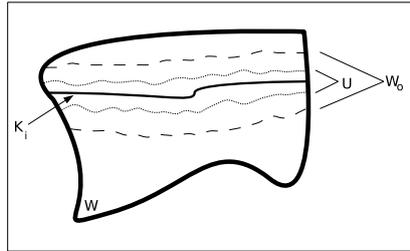


Figura 8: Construção de g

Como X é um fechado de $W \setminus U$, o Teorema de Extensão de Tietze garante a extensão de h para

$$H : W \setminus U \rightarrow S^n \setminus \{y\}.$$

Podemos definir uma extensão de f por H em $W \setminus U$ e por g em W_0 . Note a boa definição dado que $H = g$ em $W_0 \setminus U$. □

O corolário a seguir também é conhecido como o Teorema de Hopf

Corolário 9.1. *Sejam M uma variedade compacta e $f, g : M \rightarrow S^n$ funções contínuas. Então f é homotópica a g se, e somente se, $\text{grau}(f) = \text{grau}(g)$.*

Demonstração. Note que o grau da função

$$h : \{0, 1\} \times M \rightarrow S^n, \quad h(0, x) = f(x), \quad h(1, x) = g(x),$$

é zero. O Teorema 9.1 implica a existência de uma função $H : [0, 1] \times N \rightarrow S^1$ contínua que estende h . Note que H é a homotopia entre f e g . □

Sabemos que se uma variedade admite um campo não nulo, então ela possui característica de Euler igual a zero. A recíproca é verdadeira.

Teorema 9.2. *Seja M uma variedade compacta com característica de Euler nula, isto é $\chi(M) = 0$. Então M admite um campo suave não nulo.*

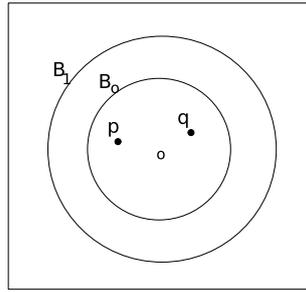
Demonstração. Seja X um campo com singularidades simples e $p, q \in M$ singularidades simples de X , tal que o índice de p seja $+1$ e o de q seja -1 . Seja $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma carta cuja imagem seja todo \mathbb{R}^n e que contenha os pontos p e q e mais nenhuma outra singularidade.

Olhemos agora o problema em coordenadas. Seja $B_0 = B(0, R_0)$ a bola que contenha p e q , considere a bola $B_1 = B(0, R_0 + 1)$. Sabemos que a função

$$f : \partial B_0 \rightarrow S^{n-1}$$

$$x \mapsto \frac{X(x)}{\|X(x)\|}$$

tem grau zero. Pelo Teorema de Hopf 9.1 f se estende a uma $F : B_0 \rightarrow S^{n-1}$.



O campo X não se anula em $\mathbb{R}^n \setminus B_1$. Estendemos X em B_1 . Seja $h : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ suave tal que $h(x) = 1$ se $x \in B_1^c$ e $h(x) = 0$ se $x \in B_0$. Definimos $\tilde{X} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\tilde{X}(x) = \begin{cases} X(x) & \text{se } x \in B_1^c \\ h(x)X(x) + (1 - h(x))\frac{X(x)}{\|X(x)\|} & \text{se } x \in B_1 \setminus B_0 \\ F(x) & \text{se } x \in B_0 \end{cases}$$

Levantando este campo e colando a X obtemos um novo campo com as mesmas singularidades que X menos p e q . Repetimos o procedimento ao novo campo e repetimos o processo até a eliminação completa das singularidades. \square

10 Cohomologia de De Rahn

Nesta seção iremos mostrar um paralelo que existe entre formas e a teoria de grau. Para alguns conceitos que não ficarem claros ou para ver mais resultados sobre esta teoria sugerimos a consulta de [11].

Lembremos que estamos considerando $\Omega^k(U)$ como o conjunto das k -formas alternadas em U , sendo U um aberto de alguma variedade M . Foi definido também a derivada exterior $d : \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p+1}(U)$, com isso podemos definir o **p-ésimo grupo de cohomologia de De Rham** como sendo o conjunto das formas fechadas pelo quociente das formas exatas, conseqüentemente

$$H^p(U) = \frac{\text{Ker}(d: \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p+1}(U))}{\text{Im}(d: \Omega^{p-1}(U) \rightarrow \Omega^p(U))}$$

Considere $f : N^n \rightarrow M^n$ um função suave entre as variedades M e N . Como o pull-back leva formas fechadas em formas fechadas e exatas em exatas temos que fica bem definido a seguinte transformação linear

$$f^* : H^n(M) \rightarrow H^n(N)$$

$$f^*[\omega] = [f^*\omega]$$

Estaremos fundamentalmente interessados em estudar $H_c^m(M)$ onde o índice c representa que estamos considerando formas com suporte compacto em M . No caso em que f é própria temos então que f induz de fato $f^* : H_c^n(M) \rightarrow H_c^n(N)$. Vejamos a invariância da função f^* por homotopias. Inicialmente provamos um lema que de fato contém toda a dificuldade da demonstração. Vamos às notações.

Seja $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, definimos a seguinte função $i_t : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U} \times \mathbb{R}$ $i_t(x) \mapsto (x, t)$. Dada $\omega \in \Omega^k(\mathcal{U} \times \mathbb{R})$ ela se escreve de maneira única como $\omega = dt \wedge \alpha + \beta$ onde $\alpha(x, t) = \sum_I a_I(x, t) dx_I$ e $\beta(x, t) = \sum_J b_J(x, t) dx_J$ ou seja colocamos dt em evidência em ω , observamos que $dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}$ com $I = (i_1, \dots, i_{k-1})$, analogamente para dx_J com o detalhe que β é uma k -forma.

Lema 10.1. *Com a notação acima, definimos a função*

$$K : \Omega^k(\mathcal{U} \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{k-1}(\mathcal{U})$$

$$(K\omega)(x) = \int_0^1 \alpha(x, t) dt = \sum_I \left(\int_0^1 a_I(x, t) dt \right) dx_I$$

Então vale a igualdade: $Kd\omega + dK\omega = i_1^\omega - i_0^*\omega$.*

Demonstração. Temos a expressão de ω o que portanto implica que fazendo as contas obtemos

$$K(d\omega) = \sum_J (\int_0^1 \frac{\partial b_J}{\partial t} dt) dx_J - \sum_{I,j} (\int_0^1 \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dt) dx_j \wedge dx_I$$

$$d(K\omega) = \sum_{I,j} (\int_0^1 \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dt) dx_j \wedge dx_I$$

Com isso provamos o lema com a seguinte conta.

$$K(d\omega) + d(K\omega) = \sum_J (\int_0^1 \frac{\partial b_J}{\partial t} dt) dx_J = \sum_J (b_J(x, 1) - b_J(x, 0)) dx_J = i_1^* \omega - i_0^* \omega. \quad \square$$

Provemos agora o resultado

Proposição 10.1. *Sejam $f, g : M \rightarrow N$ funções C^∞ homotópicas, considere as funções $f^*, g^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$, então $f^* = g^*$.*

Demonstração. Considere a homotopia $H : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$, $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$. Considere $\omega \in \Omega^k(N)$ uma k -forma fechada, ou seja $d\omega = 0$. O teorema segue se provarmos que $g^* \omega - f^* \omega = d\eta$ com $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$.

Usamos o lema acima e definimos a função

$$L = K \circ H^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$$

e podemos definir $\eta = L\omega$ de fato, $d(L\omega) = (Ld\omega) + d(L\omega) = KH^*d\omega + d(KH^*\omega) = KdH^*\omega + d(KH^*\omega) = i_1^*H^*\omega - i_0^*H^*\omega = g^*\omega - f^*\omega. \quad \square$

Seja $f : M \rightarrow N$ uma função contínua então podemos definir $f^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ como sendo g^* para qualquer função $g : C^\infty$ homotópica a f .

Definição 10.1. Sejam M e N variedades diferenciáveis, dizemos que M e N tem o mesmo tipo de homotopia se existem aplicações $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow M$ tais que $g \circ f$ é homotópica a identidade em M e $f \circ g$ é homotópica a identidade em N .

Como exemplo, se U for uma vizinhança tubular de M então U tem a mesma homotopia de M . Sendo as funções f e g dadas pela identidade e outra pela própria projeção associada a vizinhança tubular. Vejamos como usamos este conceito no estudo das formas.

Proposição 10.2. *Sejam M e N variedade com o mesmo tipo de homotopia, então $H^k(M)$ é isomorfo a $H^k(N)$.*

Demonstração. Considere f e g funções da definição de ter o mesmo tipo de homotopia. Pela proposição acima temos que

$$g^* \circ f^* = (f \circ g)^* = id$$

$$f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = id$$

Portanto $f^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ é a inversa de $g^* : H^k(M) \rightarrow H^k(N)$. Provando assim o que queríamos. \square

Assim temos por exemplo que $H^k(S^n) \sim H^k(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$. Assim como o fato de toda forma fechada ser localmente exata.

Agora provemos o teorema responsável em fazer a ligação entre os conceitos introduzidos aqui e a teoria do grau.

Teorema 10.2. *Seja M^m uma variedade compacta conexa então a integração sobre M induz um isomorfismo*

$$\int_M = I : H^n(M) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Demonstração. I é linear e sobrejetiva. Com isso para vermos que é um isomorfismo basta provarmos que

$$\dim H_c^n(M) = 1$$

Que será feito em três passos para efeito de clareza de exposição.

Passo 1) $\dim H_c^1(\mathbb{R}) = 1$

Neste caso vejamos que I é injetiva. Ou seja considere $\omega(x) = f(x)dx$ tal que $I(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$. Vejamos que $[\omega] = 0$, isto é que ω é exata. Existe $L > 0$ tal que $\text{supp. } f \subset [-L, L]$ definindo $g(x) = 0$ se $x \leq -L$ e $g(x) = \int_{-L}^x f(x)$ assim $dg = \omega$.

Passo 2) Se $\dim H_c^n(\mathbb{R}^n) = 1$ então $\dim H_c^n(N^n) = 1$, N variedade.

Seja $U \subset N$ uma vizinhança coordenada $U \approx \mathbb{R}^n$. Tomemos $\omega \in \Omega_c^n(N)$ com $\text{supp. } \omega \subset U$ tal que $\int \omega = 1$. O objetivo é mostrar que a classe de cohomologia de ω gera $H_c^n(N)$, ou seja dado $\bar{\omega} \in \Omega_c^n(N)$ tem-se $\bar{\omega} = c\omega + d\eta$ com $c \in \mathbb{R}$ e $\eta \in \Omega_c^{n-1}(N)$.

Podemos supor que $\text{supp. } \bar{\omega} \subset V \approx \mathbb{R}^n$. Para isto usa-se partição da unidade. Considere agora vizinhanças coordenadas $\{U_i\}_{i=0}^{k+1}$ tal que $U_0 = V$, $U_{k+1} = U$ e $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Tomamos $\omega_i \in \Omega_c^n(U_i \cap U_{i+1})$ tal que $\int_M \omega_i = \int_M \bar{\omega}$.

Utilizando a hipótese e a transitividade proveniente da classe de equivalência temos que $\omega_0 \sim \omega_1 \dots \omega_k \sim \bar{\omega}$, $\bar{\omega} = \omega_k + d\eta_k$, $\omega_k = c\omega + d\eta'$ assim provamos o que queríamos $\bar{\omega} = c\omega + d(\eta + \eta')$.

Assim, em particular temos que $\dim H_c^n(S^n) = 1$. Com isso vamos ao próximo passo.

Passo 3) Se $\dim H_c^{n-1}(S^{n-1}) = 1$ então $\dim H_c^n(S^n) = 1$. Novamente checamos que I é injetiva. Assim considere $\omega \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$, $I(\omega) = 0$ e $\text{supp. } \omega \subset B$, sendo B uma bola suficientemente grande centrada em zero.

Objetivamos verificar que $\omega = d\eta$ com $\eta \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$. Usaremos que toda forma fechada em um aberto conexo do \mathbb{R}^n é exata. Logo, $\omega = d\alpha$.

Considere outra bola $D \supset \bar{B}$.

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_D \omega = \int_D d\alpha = \int_{\partial D} \alpha$$

Então usando a hipótese temos que $\int_{\partial D} \alpha = 0$ então $[\alpha|_{\partial D}] = 0$ em $H_c^{n-1}(\partial D)$. Considerando o isomorfismo entre $H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus B) \sim H^{n-1}(\partial D)$. Temos que $[\alpha] = 0$ em $H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus B)$, $\alpha = d\beta$.

Considere $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\phi \equiv 0$ em uma vizinhança de B com fecho em D . e $\phi \equiv 1$ fora de D .

Por fim definimos $\gamma = \alpha - d(\phi\beta) \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$. Assim $\text{supp.}\gamma \subset \bar{D}$ e $d\gamma = d\alpha = \omega$ como queríamos. \square

Assim, dada uma f própria como mais acima sabendo que uma transformação linear da reta na reta pode ser vista como um escalar portanto existe um único escalar $\alpha(f)$ que faz o seguinte diagrama comutar.

$$\begin{array}{ccc} H_c^n(M) & \xrightarrow{f^*} & H_c^n(N) \\ f_M \downarrow & & \downarrow f_N \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\alpha(f)} & \mathbb{R} \end{array}$$

Ou seja, para $\omega \in \Omega^n(M)$ temos

$$\int_N f^*(\omega) = \alpha(f) \int_M \omega$$

O teorema a seguir mostra como poderemos relacionar os conceitos de grau e formas.

Teorema 10.3. *Para f como acima tem-se que $\alpha(f) = \text{grau}(f)$.*

Demonstração. Provemos então que $\text{grau}(f) = \sum_{q \in f^{-1}(p)} \text{sgn} Df_q$ sendo p um valor regular de f . Considere V_q tal que $f|_{V_q} : V_q \rightarrow U$ seja um difeomorfismo, tomemos $\omega \in \Omega^n(M)$ tal que $\text{supp}_M(\omega) \subset U$ e $\int_M \omega = 1$ assim $\text{supp}_N(f^*(\omega)) \subset f^{-1}(U) = V_{q_1} \cup \dots \cup V_{q_k}$. Podemos olhar então

$$f^*(\omega) = \sum_{i=1}^k \omega_i$$

onde $\text{supp}(\omega_i) \subset V_{q_i}$ e $\omega_i|_{V_i} = (f|_{V_{q_i}})^*(\omega|_U)$.

O resultado segue portanto do seguinte cálculo.

$$\alpha(f) = \alpha(f) \int_M \omega = \int_N f^*(\omega) = \sum_{i=1}^k \int_N \omega_i = \sum_{i=1}^k \int_{V_i} (f|_{V_i})^*(\omega|_U) = \sum_{i=1}^k \text{sgn} Df_{q_i} \int_U \omega|_U = \sum_{i=1}^k \text{sgn} Df_{q_i}. \quad \square$$

Considere em M uma variedade qualquer, não necessariamente compacta, orientada. Então existe sobre M uma forma ω_0 conhecida como forma elemento de volume. Sendo $\omega_0(p)(v_1, \dots, v_m) = \text{volume orientado do paralelogramo gerado por } v_1, \dots, v_m \text{ no espaço tangente } T_p M$. O volume da variedade M é definido como sendo $\text{Vol} M = \int_M \omega_0$ Como ω_0 não

possui suporte compacto não podemos aplicar o que fizemos acima. No entanto é possível contornar tal problema. Considere $M = \cup_{i=1}^{\infty} N_i$ como união de compactos N_i $N_i \subset \text{int}.N_{i+1}$. Considere funções f_i suaves que são identicamente iguais a 1 em $\text{int}.N_i$ e nulas fora de N_{i+1} e $f_i \in [0, 1]$. Definimos $\omega_i = f_i \omega$. Assim podemos usar o que fizemos acima e obtemos $\text{grau}(f) = \frac{1}{\int_M \omega_i} \int_N f^* \omega_j$ mas $\int_M \omega = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_M \omega_j$, assim obtemos

$$\boxed{\text{grau}(f) = \frac{1}{\text{vol}M} \int_N f^* \omega_0}$$

É possível relacionar o que estudamos na seção 8 com esta seção. Definamos os seguintes números, chamados de **números de Betti** como sendo a dimensão dos espaços de cohomologia de De Rahn.

$$b_r = \dim H^r(M)$$

É possível provar que a característica de Euler possui a seguinte relação com os números de betti,

$$\chi(M) = \sum_r (-1)^r b_r$$

De fato o que estudamos aqui está ligado a teoria de homologia. Se definem os conjuntos de cohomologia $H_r(M)$ sendo aonde aparecem os números de betti, como sendo a dimensão do espaço vetorial $H_r(M)$, todavia o teorema de dualidade de Poincaré afirma que $H_r(M)$ e $H^r(M)$ são isomorfos. E foi o que usamos acima para definir o número de betti.

A Geometria Hiperbólica e Recobrimento Universal de Superfícies

A.1 Recobrimento de Variedades

Sejam M e \widetilde{M} variedades suaves, apesar de que para as nossas considerações iniciais precisarmos apenas de espaços topológicos.

Definição A.1. Dizemos que uma função $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ é um recobrimento se para todo $p \in M$ existe vizinhança $\mathcal{V}_p \in M$ tal que

- $f^{-1}(V_p) = \bigcup_{q \in f^{-1}(p)} \mathcal{U}_q$ união disjunta, onde $f(\mathcal{U}_q) = V_p$,
- $f : \mathcal{U}_q \rightarrow \mathcal{V}_q$ é um homeomorfismo.

Na definição acima chamaremos π de **recobrimento diferenciável** se π for diferenciável e $f : \mathcal{U}_q \rightarrow \mathcal{V}_q$ um difeomorfismo. E de **recobrimento holomorfo** caso as variedades sejam holomorfas e π uma função holomorfa e $f : \mathcal{U}_q \rightarrow \mathcal{V}_q$ um biholomorfismo. Portanto a partir de agora trataremos apenas de recobrimentos, e quando estivermos interessados em olhar para recobrimentos holomorfos a generalização será óbvia.

Um caminho $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \widetilde{M}$ é dito **levantamento do caminho** $\gamma : I \rightarrow M$ (com relação a um recobrimento π) se

$$\phi \circ \tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) \quad \forall t \in I$$

onde $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Proposição A.1. Dado um caminho $\gamma : I \rightarrow \widetilde{M}$ e $\tilde{x}_0 \in \widetilde{M}$ tal que $\pi(\tilde{x}_0) = \gamma(0)$ então existe único levantamento $\tilde{\gamma}$ tal que

$$\tilde{\gamma} : I \rightarrow \widetilde{M}, \quad \tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$$

Demonstração. Sejam vizinhanças \mathcal{V}_{x_0} e $\mathcal{U}_{\gamma(0)}$ de x_0 e $\gamma(0)$ respectivamente de forma que

$$f|_{\mathcal{V}_{x_0}} : \mathcal{V}_{x_0} \rightarrow \mathcal{U}_{\gamma(0)}$$

seja um homeomorfismo. Portanto é claro que na vizinhança de x_0 temos único levantamento definido por

$$\tilde{\gamma}(t) = f|_{\mathcal{V}_{x_0}}^{-1}(\gamma(t))$$

para $t \in [0, \epsilon]$ onde ϵ é pequeno o suficiente para a boa definição acima.

Portanto considere o conjunto

$$\mathcal{A} = \{t \in I \mid \text{Existe único levantamento de } \gamma \text{ em } [0, t]\}$$

Olhando para o supremo acima, caso não seja atingido em 1 poderíamos estender o levantamento de maneira única como acima. \square

Definição A.2. As funções $\phi : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ que satisfazem

$$\pi \circ \phi = \pi$$

são chamadas de automorfismos do recobrimento π .

Usaremos a seguinte notação

$$Aut(\pi) = \{ \text{Automorfismos de } \pi \}$$

O grupo fundamental $\pi_1(M)$ independe do ponto base $p_0 \in M$ que tomamos, isto é para outro ponto base este grupo é isomorfo. E descrevemos $\pi_1(M)$ como sendo a classe (via homotopia) das curvas fechadas que começam e terminam em p_0 .

Uma variedade M é **simplesmente conexa** se o grupo fundamental $\pi_1(M)$ tiver apenas o elemento neutro. Ou seja, toda curva fechada é homotópica a uma curva constante. Quando \widetilde{M} for simplesmente conexa diremos que o recobrimento $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ é um **recobrimento universal**. O nome recobrimento universal deve-se ao fato que se $\pi : \widetilde{M}_1 \rightarrow M$ for outro recobrimento universal de M então \widetilde{M}_1 e \widetilde{M} são homeomorfas.

Teorema A.3. *Toda variedade M admite recobrimento universal.*

Um outro teorema importante relacionando grupo fundamental e o grupo dos automorfismos de um recobrimento é

Teorema A.4. *Seja $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ um recobrimento universal de M então*

- $Aut(\pi)$ é isomorfo a $\pi_1(M)$,
- $M/Aut(\pi)$ é homeomorfa a M .

A.2 Enunciados

Dizemos que uma variedade riemanniana M admite coordenada isotérmica se admite parametrizações que preservam o ângulo. Uma **superfície de Riemann** M é uma variedade um dimensional holomorfa (dois dimensional real).

Teorema A.5 (Gauss-Chern). *Toda superfície riemanniana admite coordenadas isotérmicas.*

Este teorema implica que toda superfície admite uma estrutura de superfície de Riemann.

Olhando o recobrimento universal de uma superfície podemos obter informações relevantes, particularmente no caso de superfície de Riemann tendo em vista que sabemos classificar as superfícies de Riemann simplesmente conexas.

Teorema A.6. *As únicas superfícies de Riemann simplesmente conexas são*

$$\mathbb{C}, \quad \overline{\mathbb{C}}, \quad \mathbb{D}.$$

Onde por única entendemos a menos de biholomorfismo.

Corolário A.1. *Seja M uma superfície de Riemann, não biholomorfa a $\mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{T}^2$ e $\overline{\mathbb{C}}$ então o recobrimento holomorfo universal de M é o disco unitário \mathbb{D} .*

A.3 Geometria Hiperbólica

Introduzimos em \mathbb{D} a métrica Riemannina dada pela proposição abaixo.

Proposição A.2. *Existe uma única métrica Riemannina em \mathbb{D} a menos de multiplicação por real positivo de forma que as funções de Möbius que preservam o disco sejam isometria.*

Definição A.7. O disco \mathbb{D} com uma métrica descrita acima é chamado de **disco hiperbólico**.

As funções de Möbius são bem conhecidas, em particular devido a uma de suas características, como no teorema abaixo, sendo isometrias disco possui curvatura constante, de fato medindo ângulos de triângulos geodésicos podemos verificar que a curvatura é negativa, logo tomando uma constante apropriada para multiplicar a métrica podemos supor que o disco (\mathbb{D}, g) possui curvatura constante negativa igual a -1 . De fato, é um resultado mais geral da geometria Riemannina que o disco hiperbólico é o modelo de variedade simplesmente conexa de curvatura constante negativa.

Teorema A.8. *Sejam $p, q \in \mathbb{D}$. $\{e_i\}$ e $\{\bar{e}_i\}$ bases ortonormais em p e q respectivamente. Então existe função de Möbius*

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, \quad f(p) = q, \quad df_p e_i = \bar{e}_i$$

Corolário A.2. *Os biholomorfismos do disco são isometrias.*

Podemos caracterizar o disco hiperbólico de outra forma, que por vezes é mais conveniente para se trabalhar. Definamos o semi-espaço \mathbb{H} de Poincaré

$$\mathbb{H} = \{(x, y) \mid y > 0\}$$

Analogamente existe única métrica riemanniana a menos de multiplicação por escalar positivo cujas transformações de Möbius são isometria.

Por completeza enunciemos o teorema que explicita as métricas de cada espaço assim como fornece a isometria entre eles.

Teorema A.9. $(\mathbb{D}, \langle, \rangle_{\mathbb{D}})$ e $(\mathbb{H}, \langle, \rangle_{\mathbb{H}})$ são isométricos.

Demonstração. De fato a isometria é dada por

$$f : (\mathbb{D}, \langle, \rangle_{\mathbb{D}}) \rightarrow (\mathbb{H}, \langle, \rangle_{\mathbb{H}})$$

$$f(z) = \frac{4(z - z_0)}{|z - z_0|^2} - 2z_0$$

onde δ é a métrica riemanniana, $z_0 = (0, -1)$, $\langle, \rangle_{\mathbb{H}} = \frac{1}{y^2} \delta$ e $\langle, \rangle_{\mathbb{D}} = \frac{4}{(1-|z|^2)^2} \delta$. \square

Seja M uma superfície hiperbólica (isto é que pode ser recoberta pelo disco) e

$$\pi : \mathbb{D} \rightarrow M$$

um recobrimento universal holomorfo. Podemos induzir naturalmente uma métrica em M proveniente da métrica hiperbólica de \mathbb{D} .

Sejam $p \in M$, $\tilde{p} \in \mathbb{D}$ e $v \in T_p M$ com $\pi(\tilde{p}) = p$. Então

$$\|v\|_p := \|(d\pi(\tilde{p}))^{-1}.v\|_{\tilde{p}}$$

O número acima está bem definido já que se $\pi(z_1) = \pi(z_2)$ então existe $\phi \in \text{Aut}(\pi)$ tal que $\phi(z_1) = z_2$. Mas $\phi \in \text{Aut}(M)$ então ϕ é um biholomorfismo do disco e portanto uma isometria.

Referências

- [1] Arvanitoyeorgos, A., **An introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces**, *AMS-American Mathematical Society*, 2003.
- [2] Guillemin, V. and Pollack, A., **Differential Topology**, *Prentice-Hall*, 1974.
- [3] Hirsch, M. W., **Differential Topology**, *Springer-Verlag*.
- [4] do Carmo, M.P., **Geometria Riemanniana**, *Projeto Euclides*, 2005.
- [5] Lima, E.L., **Análise Real, Volume 3**, *Coleção Matemática Universitária - IMPA*, 2007.
- [6] Lima, E.L., **Curso de Análise Volume 2**, *Projeto Euclides - IMPA*, 2006.
- [7] Lima, E.L., **Álgebra Exterior**, *Coleção Matemática Universitária - IMPA*, 2005.
- [8] Lima, E.L., **Grupo Fundamental E Espaços de Recobrimento**, *Projeto Euclides-IMPA*, 1998.
- [9] Lima, E.L., **Introdução à Topologia Diferencial**, *Publicações Matemáticas - IMPA*, 2001.
- [10] Lima, E.L., **Variiedades Diferenciáveis**, *Publicações Matemáticas - IMPA*, 2007.
- [11] Madsen, I. and Tornehave, J., **From Calculus to Cohomology**, *Cambridge university press*, 1997.
- [12] Matsumoto, Y., **An Introduction to Morse Theory**, *Translations of Mathematical Monographs*, Volume 208, 2002.
- [13] Milnor, J.W., **Morse Theory**, *Princeton University Press*, 1973.
- [14] Milnor, J.W., **Topology From The Differentiable Viewpoint**, *Princeton University Press*, 1965.
- [15] Morita, S., **Geometry of Differential Forms**, *Translations of Mathematical Monographs*, Volume 201, 2001.

- [16] Palis, J. Jr. and de Melo, W., **Geometric Theory of Dynamical Systems, an introduction.** *Springer-Verlag*, 1982.
- [17] Prasolov, V. V., **Elements of Combinatorial and Differential Topology.** *American Mathematical Society*, 2006.
- [18] Sotomayor, J., **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias,** *Projeto Euclides - IMPA*, 1979.
- [19] Warner, F.W., **Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups,** *Glenview, Ill.: Scott, Foresman*, 1971.

Índice Remissivo

função própria, 80

Grau

função própria, 80

Homotopia, 78

diferenciável, 78

Número de interseção, 82

Orientação

Variedade topológica, 80

Singularidade simples, 83

Teorema

de Hopf, 91

de Transversalidade de Thom, 60