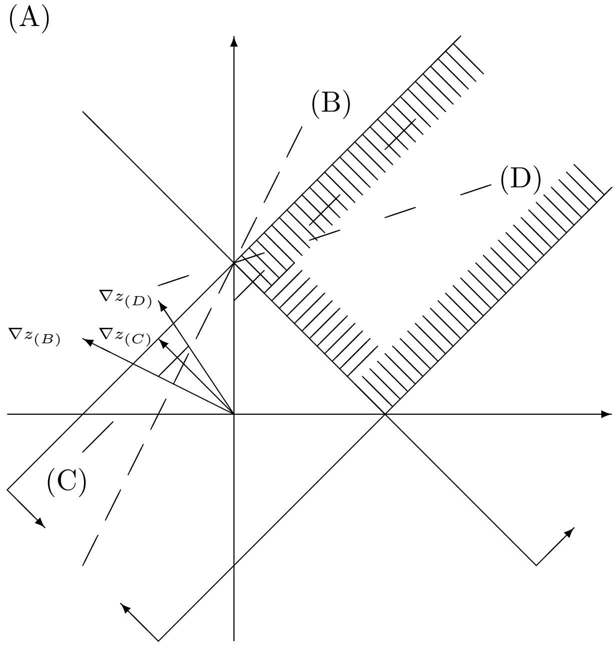
MS428 - Programação Linear - PROVA 1 - 02/09/2010

Problema 1: Seja x_j a quantidade fabricada do produto j, em que $j = 1$ indica o produto A, $j = 2$ indica o produto B e assim por diante. Com esta definição temos o seguinte modelo matemático:

$$
\begin{array}{rc}
\text{Maximizar} & 10x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 15x_4 + 18x_5 + 10x_6 + 19x_7 \\
\text{Restrições de Disponibilidade} & 0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + 0.1x_4 + 0.2x5 + 0.1x_6 + 0.2x_7 \leq 500 \\
 & 0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.4x_3 + 0.2x_4 + 0.2x_5 + 0.3x_6 + 0.4x_7 \leq 750 \\
 & 0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.1x_3 + 0.2x_4 + 0.1x_5 + 0.2x_6 + 0.3x_7 \leq 350 \\
 & 0.02x_1 + 0.03x_2 + 0.01x_3 + 0.04x_4 + 0.01x_5 + 0.02x_6 + 0.04x_7 \leq 60 \\
 & 0.04x_1 + 0.00x_2 + 0.02x_3 + 0.02x_4 + 0.06x_5 + 0.03x_6 + 0.05x_7 \leq 80 \\
\text{Restrições de Produção} & x_1 \geq 200 \\
 & x_2 \leq 800 \\
 & x_5 \leq 400 \\
\text{Não-Negatividade} & x_1, \ldots, x_7 \geq 0
\end{array}
$$

Problema 2:

(A)



(B) A solução geométrica está feita no mesmo gráfico do item (A), onde o vetor gradiente da função-objetivo é dado por $\nabla z(B)$ e a reta tracejada perpendicular a ele nos dá o ponto $x^* = (0, 2)^t$ com $z^* = -2x_1^* - x_2^* = 2$. Ou seja, neste caso, temos solução única.

(C) A solução geométrica está feita no mesmo gráfico do item (A), onde o vetor gradiente da função-objetivo é dado por $\nabla z(C)$ e a reta tracejada perpendicular a ele nos dá soluções alternativas com com raio ótimo, isto é, o ponto $x^* = (0, 2)^t$ com $z^* = -2x_1^* - x_2^* = 2$ é solução, bem como, todos os pontos da forma $y^* = x^* + \lambda d^*$ com $\lambda \geq 0$ também são soluções. Como será explicado no item (G), a direção extrema d^* é igual a $(1, 1)^t$.

(D) A solução geométrica está feita no mesmo gráfico do item (A), onde o vetor gradiente da função-objetivo é dado por $\nabla z(D)$ e a reta tracejada perpendicular a ele nos leva a concluir que a solução é ilimitada, pois, não temos nenhuma restrição que bloqueie o crescimento da função-objetivo $z = -x_1 + 3x_2$.

(E)

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_5 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

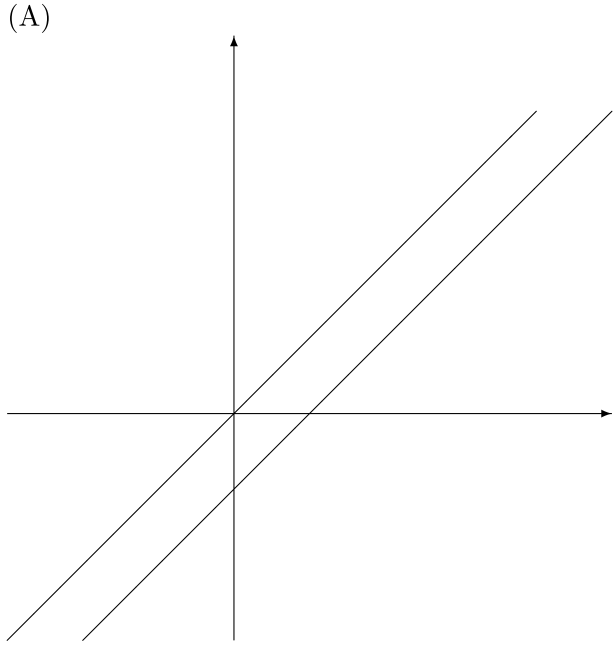
(F) Para descobrir a base, devemos descobrir as variáveis que são não-nulas. Se o ponto não for degenerado então isto é uma tarefa fácil, pois, o número de não é exatamente o número de restrições. Mas, se o ponto for degenerado então podemos ter mais de uma base representando o mesmo ponto extremo (no caso, $(2,0)^t$ é degenerado. De qq maneira, vamos começar procurando aquelas variáveis que devem ser não-nulas. Olhando o ponto $(2,0)^t$, observamos que as variáveis x_1 e x_3 tem que ser não-nulas. Como temos 3 restrições , temos que ter 3 variáveis básicas ($x_B \in \Re^{3\times 3}$) , logo, para completar o rank da base temos $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$ possíveis maneira de se combinar as variáveis x_2, x_4 e x_5 para peretencerem à base. Logo, temos

$$\begin{array}{lll} \text{Base 1:} & B = (a_1, a_2, a_3) & x = (x_B, x_N)^t = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^t = (2,0,4,0,0)^t \\ \text{Base 2:} & B = (a_1, a_3, a_4) & x = (x_B, x_N)^t = (x_1, x_3, x_4, x_2, x_5)^t = (2,0,4,0,0)^t \\ \text{Base 3:} & B = (a_1, a_3, a_5) & x = (x_B, x_N)^t = (x_1, x_3, x_5, x_2, x_4)^t = (2,0,4,0,0)^t \end{array}$$

(G) Como (segundo o texto) não há a necessidade de se montar o sistema homogêneo para se calcular o conjunto D das direções extremas, podemos calcular as direções extremas pela subtração de dois pontos em cima da aresta que define a direção extrema. Logo, para a aresta definida pela equação $-x_1 + x_2 = 2$ temos os pontos $(0,2)^t$ e $(-2,0)^t$), logo $d_1 = (0-(-2), 2-0) = (2,2)^t$ e temos que $d_2 = d_1 = (1,1)^t$, pois, estamos interessados apenas na direção e não nos importamos com a magnitude do vetor.

Problema 3:

(A)



Como as retrições devem ser satisfeitas na igualdade, isto quer dizer que não temos soluções factíveis para o problema. Logo, a região é infactível.

(B) O conjunto D é gerado pela resolução do sistema homogêneo

$$\begin{aligned} d_1 - d_2 &= 0 \\ d_1 + d_2 &= 1 \\ d_1, d_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

cuja solução é $(d_1, d_2)^t = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^t$. Logo, a resposta é SIM.

(C) Não necessariamente, basta pegar um tetraedro no $\Re^3$.

(D) Não, pegue um tetraedro ilimitado e teremos 4 direções extremas estando no $\Re^3$.