# MS428 - RESOLUÇÃO DA PROVA 02 - 19/10/2010

Prof. Moretti - Respostas sem justificativas não serão consideradas para correção

**Nome:** ______________________________ **RA:** ______________

**Esta prova é composta de três questões.**

**Questão 1:** Considere o seguinte PPL

$$
\begin{array}{rll}
\text{Maximize} & z = 2x_1 + 12x_2 + 7x_3 & \\
\text{sujeito a} & & \\
& x_1 + 3x_2 + 2x_3 & \leq 10000 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq 4000 \\
& x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

cuja solução ótima é dada pelas equações básicas abaixo

$$
\begin{aligned}
x_4 &= 2000 + 3x_1 + x_2 + 2x_5 \\
x_3 &= 4000 - 2x_1 - 2x_2 - x_5 \\
z &= 28000 - 12x_1 - 2x_2 - 7x_5
\end{aligned}
$$

Pede-se:

(A) Dê $B^{-1}$.

Com as restrições são do tipo ''$\leq$'' temos que as colunas de $B^{-1}$ são formadas pelas colunas das variáveis de folga. Como as equações básicas são escritas na forma $Ix_B = B^{-1}$b - $B^{-1}N$, temos que a primeira coluna de $B^{-1}$ é $(1,0)^t$ porque $x_4$ é básica e, portanto, não está à direita da igualdade e assim mantém o sinal. A segunda coluna é $(-2,1)^t$ que corresponde à coluna $y_5 = B^{-1}a_5$. Isto é,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(B) Dê $B$.

$B$ é formada pelas colunas $[a_4, a_3]$ logo, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(C) Dê $(z_j - c_j)$ para $j = 1,2,3,4,5$.

A linha de $z$ nas equações básicas lê-se: $z = 28000 - 12x_1 - 2x_2 - 0x_3 - 0x_4 - 7x_5$ temos

$$
\begin{aligned}
z_1 - c_1 &= 12 \\
z_2 - z_2 &= 2 \\
z_3 - z_3 &= 0 \\
z_4 - c_4 &= 0 \\
z_5 - c_5 &= 7
\end{aligned}
$$

(D) Dê $B^{-1}N$.

Pelas equações básicas temos que $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$

$$B^{-1}N = [y_1, y_2, y_5] = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(E) Dê $c_B^t B^{-1}$.

Lembre-se que o custo reduzido $z_j - c_j = c_B^t a_j - c_j$ para cada $j$,logo, para as variáveis de folga que tem $a_j = e_j$ temos que o custo reduzido da i-ésima variável de folga nos dá o i-ésimo componente de $c_B^t B^{-1}$. Assim sendo, $c_B^t B^{-1} = [z_4 - c_4, z_5 - c_5] = [0, 7]^t$

(F) Suponha que o lado direito da segunda equação seja trocado para $4000 + \delta$. Qual é o intervalo de $\delta$ que manterá base atual ótima?

Olhando nas equações básicas

$$\begin{aligned} x_B &= B^{-1}b - B^{-1}N \\ z &= c_B^t B^{-1}b - (c_B^t B^{-1}N - c_N)x_N \end{aligned}$$

vemos que o aumento de um componente do vetor $b$ pode causar uma infactiblidade, a otimalidade não é afetada, pois, os custos reduzidos $c_B^t B^{-1}N - c_N)$ não são em função de $b$. Logo, temos que garantir que

$$\begin{aligned} x_B &= B^{-1}\begin{bmatrix} 10000 \\ 4000+\delta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10000 \\ 4000+\delta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10000 - 8000 - 2\delta \\ 4000+\delta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2000 - 2\delta \\ 4000+\delta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Isto quer dizer que se

$$x_B = \begin{bmatrix} 2000 - 2\delta \\ 4000+\delta \end{bmatrix} \geq 0$$

então $\delta$ deve estar no intervalo $[-4000, 1000]$.

(G) Escreva o valor ótimo de $z$ como função de $\delta$.

Na linha da função-objetivo lê-se $z = c_B^t B^{-1}b - (c_B^t B^{-1}N - c_N)x_N$, apenas o valor da função-objetivo é em função do vetor $b$. Assim sendo,

$$\begin{aligned} z &= c_B^t \begin{bmatrix} 2000 - 2\delta \\ 4000+\delta \end{bmatrix} \\ &= [0, 7]\begin{bmatrix} 2000 - 2\delta \\ 4000+\delta \end{bmatrix} \\ &= 28000 + 7\delta \end{aligned}$$

(H) Suponha que aumentar o lado direito da segunda equação envolva uma expansão no setor de manufatura da empresa. Isto envolve um custo fixo bem como um custo variável que é função de $\delta$. Em particular,

$$h(\delta) = \begin{cases} 0 & \text{se } \delta = 0 \\ 3000 + 3\delta & \text{se } \delta > 0 \end{cases}$$

Qual é o ponto de "break-even", isto é, o ponto aonde o custo $h(\delta)$ e o lucro de se adicionar $\delta$ são iguais. Qual seria o valor ótimo de $\delta$?

Queremos o ponto aonde o custo se iguala com o lucro, logo,

$$\begin{aligned} 3000 + 3\delta &= 7\delta \\ 4\delta &= 3000 \\ \delta &= 750 \end{aligned}$$

**Questão 2:** Considere as equações básicas abaixo provenientes de um problema de minimização com restrições do tipo $'' \leq ''$ (assuma que $x_3, x_4, x_5$ são variáveis de folga).

$$\begin{aligned} x_1 &= c + 2x_2 - 1x_4 \\ x_3 &= d + 1x_2 - 2x_4 \\ x_5 &= e + 0x_2 - 3x_4 \\ z &= f - ax_2 - bx_4 \end{aligned}$$

Suponha que $a < 0, b \leq 0$ e $c, d, e \geq 0$. Pede-se :

(a) Ache $B^{-1}$.

Da mesma forma que na questão 1, $B^{-1}$ está são as colunas das variavéis de folga com os sinais trocados

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Estamos no ótimo ?

Como $a < 0, b \leq 0$ e o problema é de minimização estamos no ótimo,pois, os custos reduzidos das variáveis não-básicas satisfazem o critério de otimalidade.

(c) Ache o problema original.

As equações básicas do problema original são dadas por $x_3, x_4, x_5$ que formam a base trivial. Assim sendo, precisamos forçar a variável $x_4$ a entrar na base

$$\begin{aligned}
x_4 &= c - x_1 + 2x_2 \\
x_3 &= d + x_2 - 2c + 2x_1 - 4x_2 \\
&= (d - 2c) + 2x_1 - 3x_2 \\
x_5 &= e + 0x_2 - 3c + 3x_1 - 6x_2 \\
&= (e - 3c) + 3x_1 - 6x_2 \\
z &= f - ax_2 - bc + bx_1 - 2bx_2 \\
&= (f - bc) + bx_1 - (a + 2b)x_2
\end{aligned}$$

onde $(f - bc)$ é igual a zero, pois, a base é composta apenas por variáveis de folga cujo custos originais são iguais a zero.

(d) Das equações dadas, identifique $c_B^t B^{-1}$.

Da mesma forma que na questão 1, $c_B^t B^{-1}$ são os custos reduzidos das variáveis de folga, a saber,

$$\begin{aligned}
z_3 - z_3 &= 0 \\
z_4 - c_4 &= b \\
z_5 - c_5 &= 0
\end{aligned}$$

Agora suponha que $a > 0, b \leq 0$ e $c, d, e \geq 0$. Pede-se :

(e) Estamos no ótimo ?

Não estamos mais no ótimo, pois, $a > 0$ faz com que a variável não-básica $x_2$ seja candidata a entrar na base

(f) Dê uma direção extrema.

Olhando nas equações básicas e agregando as linhas das variáveis básicas temos

$$\begin{aligned}
x_1 &= c + 2x_2 - 1x_4 \\
x_2 &= 0 + x_2 + 0x_4 \\
x_3 &= d + 1x_2 - 2x_4 \\
x_4 &= 0 + 0x_2 + 1x_4 \\
x_5 &= e + 0x_2 - 3x_4 \\
z &= f - ax_2 - bx_4
\end{aligned}$$

Logo, se $x_2$ ao crescer com o valor de $x_2$ nenhuma variável básica decresce, assim temos solução ilimitada e temos que a direção simplex dada por $y_2$ é uma direção extrema. Ou seja,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(g) Seja $a = 3$ e $f = -8$. Dê uma solução factível com $z = -200$.
Queremos sair do ponto $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^t = (c, 0, d, 0, e)^t$ e andando na direção extrema $d = (2, 1, 1, 0, 0)^t$ encontrar um ponto factível que nos dê $z = -200$. Ou seja,

$$\begin{aligned} z &= f - ax_2 = -200 \text{ ou seja,} \\ z &= -8 - 3x_2 = -200 \text{ o que nos dá} \\ x_2 &= 64 \end{aligned}$$

Substituindo $x_2 = 64$ nas equações básicas escritas só em termos de $x_2$ temos

$$\begin{aligned} x_1 &= c + 2x_2 = c + 128 \\ x_3 &= d + 1x_2 = d + 64 \\ x_5 &= e + 0x_2 = e \end{aligned}$$

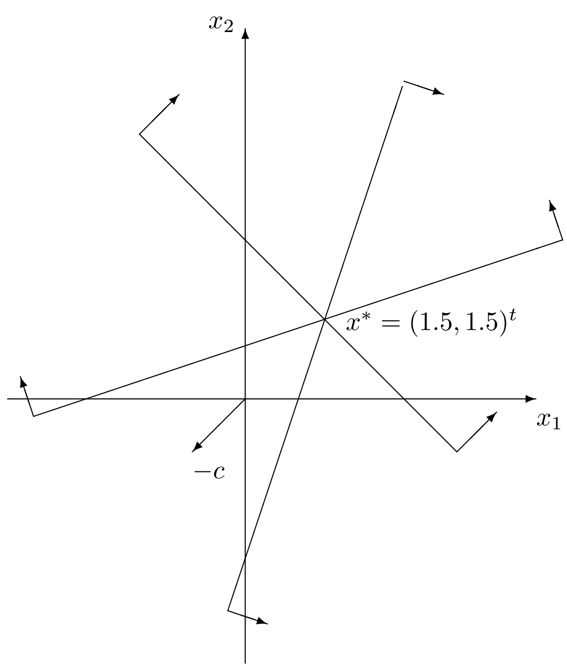
Portanto, o ponto factível que nos dá o valor de $z = -200$ é dado por

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^t = (c + 128, 64, d + 64, 0, e)^t$$

**Questão 3:** Considere o problema abaixo:

$$\begin{array}{rll} \text{Minimize} & z = x_1 + x_2 & \\ \text{sujeito a} & & \\ & -x_1 + 3x_2 & \geq 3 \\ & 3x_1 - x_2 & \geq 3 \\ & x_1 + x_2 & \geq 3 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Pede-se:
(A) Resolva-o geometricamente.




A solução geometricamente indica o ponto ótimo em $x^* = (1.5, 1.5)^t$ com $z^* = 3$.
(B) Que tipo de solução temos?
Note que o ponto $x^* = (1.5, 1.5)^t$ é um ponto degenerado. Além disso, temos soluções alternativas, pois,

a reta da função-objetivo é a mesma reta associada com a restrição $x_1+x_2 \geq 3$, logo, temos soluções alternativas. Ou seja, há mudanças de base, mas, o ponto continua o mesmo.

(C) Aplique o Método das 2 Fases e encontre a solução ótima.
Antes de aplicar o M2F quero lembrar que disse várias vezes em sala de aula que caso o problema que fossêmos trabalhar estivesse em duas dimensões então poderíamos nos valer da informação visual para facilitar nossa tarefa com o Método Simplex. Ou seja, poderíamos escolher a variável que entra na base como aquela que nos leva a um caminho menor até o ponto ótimo ou eliminar restrições redundantes que não afetam a resolução do problema. Esta questão é perfeita para usarmos a informação que nos vem do gráfico do politopo. Repare que a restrição $x_1+x_2 \geq 0$ é redundante e mais ainda, gera um ponto degenerado o que poderia nos levar a fazer contas desnecssárias, pois, continuaríamos no mesmo ponto. Assim sendo, o problema que vamos trabalhar torna-se

$$\begin{array}{rll} \texttt{Minimize} & z = x_1 + x_2 & \\ \texttt{sujeito a} & & \\ & -x_1 + 3x_2 & \geq 3 \\ & 3x_1 - x_2 & \geq 3 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Colocando-o na forma padrão temos

$$\begin{array}{rll} \texttt{Minimize} & z = x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 & \\ \texttt{sujeito a} & & \\ & -x_1 + 3x_2 - x_3 & = 3 \\ & 3x_1 - x_2 - x_4 & = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0 \end{array}$$

Como o problema não tem uma base trivial (i.e., aquela formada pelas variáveis de folga) somos obrigado a fazer uso das variáveis artificiais. Na primeira fase do M2F criamos uma função-objetivo artificial que é a soma das variáveis artifciais

$$\begin{array}{rll} \texttt{Minimize} & z_a = x_5 + x_6 & \\ \texttt{sujeito a} & & \\ & -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 & = 3 \\ & 3x_1 - x_2 - x_4 + x_6 & = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq 0 \end{array}$$

onde $x_5$ e $x_6$ são variáveis artificiais. As equações básicas da Fase 1 são

$$\begin{aligned} x_5 &= 3 + x_1 - 3x_2 + x_3 \\ x_6 &= 3 - 3x_1 + x_2 + x_4 \\ z_a &= x_5 + x_6 \end{aligned}$$

Não podemos começar com o Método Simplex ainda,pois, a equação da função-objetivo artifical ainda contém variáveis básicas. Após eliminar as variáveis básicas na equação de $z_a$ temos as seguintes equações básicas

$$\begin{aligned} x_5 &= 3 + x_1 - 3x_2 + x_3 \\ x_6 &= 3 - 3x_1 + x_2 + x_4 \\ z_a &= 6 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \end{aligned}$$

Como queremos minimizar $z_a$, vemos que temos duas candidatas a entrarem na base, $x_1$ e $x_2$. Escolho $x_1$. O teste da razão nos dá que a variável básica $x_6$ sai da base. Ap´´os os cálculos de se isolar $x_1$ no lugar de $x_6$ e substituição deste resultado nas demais equações, temos

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1 + \frac{1}{3}x_2 + 0x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_6 \\
x_5 &= 4 - \frac{8}{3}x_2 + x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_6 \\
z_a &= 4 - \frac{8}{3}x_2 + x_3 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_6
\end{aligned}$$

Ainda com a intençãode minimizar $z_a$ entramos com a variável não-básica $x_2$. Após o teste da razão descobrimos que a variável básica $x_5$ sai da base. Após os cálculos de isolar $x_2$ no lugar de $x_5$ e substituir na demais equações temos

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{8}x_3 + \frac{9}{24}x_4 - \frac{1}{8}x_5 - \frac{9}{24}x_6 \\
x_2 &= \frac{3}{2} + \frac{3}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4 - \frac{3}{8}x_5 - \frac{1}{8}x_6 \\
z_a &= 0 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 + x_6
\end{aligned}$$

E, chegamos ao fim da fim da Fase I com todas as variáveis artificiais fora da base. Agora, vamos iniciar a fase II, para isto precisamos trocar a função-objetivo artificial pela função-objetivo do problema original e atualizá-la de acordo com a base obtida na Fase I.E, vamos eliminar as variáveis artificiais das equações básicas.

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{8}x_3 + \frac{9}{24}x_4 \\
x_2 &= \frac{3}{2} + \frac{3}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4 \\
z &= x_1 + x_2 = 3 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4
\end{aligned}$$

Como o problema é de minimização, não existe variável não-básica que possa entrar na base e melhorar ainda mais o valor da função-objetivo. Logo, estamos no ótimo.

Para obter a solução completa precisamos voltar aquela restrição ao problema e calcular o valor de sua folga, ou seja,

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\geq 3 \\
x_1 + x_2 - x_6 &= 3
\end{aligned}$$

ou ainda, a última equação báscia seria

$$x_6 = -3 + x_1 + x_2 = -3 + 3 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 0$$

Portanto, a solução é dada por $x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^t = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0, 0)^t$

(D) Que informações você tira das equações básicas que indicam o tipo de solução encontrada geometricame é, olhando nas equações básicas como você sabe que o tipo de solução obtida é do tipo da encontrada geometricamente. Explique.

Como o problema completo tem três restrições temos 3 variáveis básicas, mas, uma delas é zero, o que caracteriza a solução degenerada.

## Pontuação:

| Item | 1a | 1b | 1c | 1d | 1e | 1f | 1g | 1h | 2a | 2b | 2c | 2d | 2e | 2f | 2g | 3a | 3b | 3c | 3d |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pontos | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 4 | 2 | 4 | 2 |