MS428 - PROVA 03 - 02/12/2010

Prof. Moretti - Respostas sem justificativas não serão consideradas para correção

Nome: ______________________________ **RA:** ____________

Questão 1: Uma fábrica produz 4 produtos denotados por x_1, x_2, x_3 e x_4. Cada produto é processado em dois setores (tem que passar pelos dois setores). Os tempos de processamentos (em horas por unidade produzida) são dados na tabela abaixo:

	x_1	x_2	x_3	x_4
Setor 1	3	4	8	6
Setor 2	6	2	5	8

Cada setor tem 400 horas disponíveis de trabalho. Os lucros unitários são 4,6,10 e 9 reais por unidade de x_1, x_2,x_3 e x_4 produzida, respectivamente. Tudo que for produzido será vendido. O gerente fez a disciplina MS428 com o professor Moretti e escreveu um modelo matemático que resolveu a mão e obteve a seguinte solução ótima:

$$\begin{aligned} x_2 &= 100 - \tfrac{3}{4}x_1 - 2x_3 - \tfrac{3}{2}x_4 - \tfrac{1}{4}x_5 \\ x_6 &= 200 - \tfrac{9}{2}x_1 - x_3 - 5x_4 + \tfrac{1}{2}x_5 \\ z &= 600 - \tfrac{1}{2}x_1 - 2x_3 - 0x_4 - \tfrac{3}{2}x_5 \end{aligned}$$

(A) Que tipo de solução ele obteve? Justifique a resposta.

Conforme podemos observar n alinha da função-objetivo, a variável não-básica x_4 tem custo reduzido $z_4 - c_4 = 0$ indicando que temos solução ótima alternativa

(B) Qual é o problema original?

Modelando o problema temos::

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 9x_4 \\ \text{sujeito a} \quad & \\ & 3x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 \leq 400 \\ & 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 8x_4 \leq 400 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

(C) Dê a matriz básica B da base das equações básicas acima.

A base ótima B é dada pelas colunas a_2 e a_6. Olhando no modelo do item (B) temos que $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(D) Dê a inversa da matriz básica, isto é, B^{-1} das equações básicas acima.

Como visto exaustivamente em sala de aula, a i-ésima coluna de B^{-1} sai da i-ésima variável de folga atualizada de acordo com a base atual, ou seja, y_5 e y_6:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(E) Dê a solução dual ótima completa (isto é, originais + folgas).

A solução dual associada à solução primal descrita nas equações básicas acima, está relacionada com os custos reduzidos das variáveis primais. Ou seja,

$$\begin{aligned} z_1 - c_1 = w_3 = \frac{1}{2} \\ z_2 - c_2 = w_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 - c_3 &= w_5 = 2 \\ z_4 - c_4 &= w_6 = 0 \\ z_5 - c_5 &= w_1 = \frac{3}{2} \\ z_6 - c_6 &= w_2 = 0 \end{aligned}$$

Como vocês podem perceber temos solução dual degenerada, mas, isto já era esperado, pois, o primal tem solução alternativa.

(F) Quantas unidades dos produtos 1,2,3 e 4 serão produzidas de tal maneira a maximizar o lucro?

A solução primal é dada por $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^t = (0, 100, 0, 0, 0, 200)^t$

(G) Assuma que, por um erro de um operário, foram produzidas 20 unidades do produto 3. Qual seria o custo deste erro?

A solução ótima diz que não devemos produzir o produto 3. A linha da função-objetivo nos diz $z = 600 - \frac{1}{2}x_1 - 2x_3 - 0x_4 - \frac{3}{2}x_5$, logo, caso o produto seja produzido o seu custo reduzido $z_3 - c_3 = 2$ indica que cada unidade do produto 3 produzida nos dá um custo de 2 unidades, logo, o prejuízo seria de $20 \times 2 = 40$.

(H) Em qual intervalo o lucro unitário do produto 1 pode variar sem que a base dada acima deixe de ser ótima?

Como x_1 é não-básica temos que seu novo lucro tem que ser da forma $4 + \triangle$, pois, se com lucro igual a 4, x_1 não entrou na base ótima, com $c_1 < 4$, ele não entraria na base também. Logo, temos que analisar a situação $4 + \triangle$. Como x_1 é não-básico temos apenas que calcular como ficaria seu novo custo reduzido e calcular para quais valores de $\triangle$ o custo reduzido $z_1 - c_1'$ continue satisfazendo o critério de otimalidade. Isto é

$$z_1 - c_1' = z_1 - c_1 + c_1 - c_1' = (z_1 - c_1) + (c_1 - c_1 - \triangle) = \frac{1}{2} + 4 - 4 - \triangle = \frac{1}{2} - \triangle$$

Queremos que $\frac{1}{2} - \triangle >= 0$, ou $\triangle \leq \frac{1}{2}$.

(I) Em qual intervalo o lucro unitário do produto 2 pode variar sem que a base dada acima deixe de ser ótima?

Este caso é mais complicado, pois, envolve uma variável básica. Ao mexer no custo riginal de uma variável básica podemos provocar alterações nos custos reduzidos das variáveis não-básicas. Quando $c_2 = 6$ é alterado para $6 \pm \triangle$ isto reflete nas equações básicas, pois, as equações básicas atuais refletem o trabalho que foi feito para zerar o custo reduzido da variável não-básica, isto é, zerar o custo $c_2 = 6$. Logo, se c_2 for alterado para $c_2' = c_2 + \triangle$, haverá uma sobra de $\triangle$ no custo reduzido de x_2.

Vamos analisar quando $c_2' = c_2 + \triangle$. Como só queremos saber se a solução continua ótima ou não, trabalhamos apenas com a linha da função-objetivo, ou seja, $z = 600 - \frac{1}{2}x_1 - 2x_3 - 0x_4 - \frac{3}{2}x_5$ é alterada para $z = 600 - \frac{1}{2}x_1 + \triangle x_2 - 2x_3 - 0x_4 - \frac{3}{2}x_5$ como a linha da variável x_2 é igual a $x_2 = 100 - \frac{3}{4}x_1 - 2x_3 - \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_5$, temos que ao sustituir a equação de x_2 na linha da função-objetivo obtemos

$$z = (600 + 100\triangle) - (\frac{3\triangle}{4} + \frac{1}{2})x_1 - (2\triangle + 2)x_3 - \frac{3\triangle}{2}x_4 - (\frac{1\triangle}{4} + \frac{3}{2})x_5$$

Como queremos que todos os custos reduzidos das variáveis não-básicas sejam $'' \geq 0''$,pois, o problema é de maximização, temos

$$\begin{aligned} \frac{3\triangle}{4} + \frac{1}{2} &\geq 0 \quad \Rightarrow \triangle \geq -\frac{2}{3} \\ 2\triangle + 2 &\geq 0 \quad \Rightarrow \triangle \geq -1 \\ \frac{3\triangle}{2} &\geq 0 \quad \Rightarrow \triangle \geq 0 \\ \frac{1\triangle}{4} + \frac{3}{2} &\geq 0 \quad \Rightarrow \triangle \geq -6 \end{aligned}$$

Cuja interseção é $\triangle \geq 0$. Ou seja, podemos aumentar c_2 quanto quisermos e a base atual permanecerá ótima. E, não podemos decrescer c_2 em nenhuma unidade.

(J) Em qual intervalo a capacidade do Setor 1 pode variar sem que a base dada acima deixe de ser ótima?

Se a capacidade do setor for alterada de $b_1 = 400$ para $b_1' = 400+\triangle$ teremos de calcular $B^{-1}B'$ e garantir que seja não-negativo. Logo,

$$B^{-1}b' = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 400+\triangle \\ 400 \end{pmatrix} \geq 0$$

ou seja, $\begin{pmatrix} 100+\frac{1}{4}\triangle \\ 200-\frac{1}{2}\triangle \end{pmatrix} \geq 0$

Assim sendo, se $\triangle$ estiver no intervalo $-400 \leq \triangle \leq 400$ a base atual permanecerá ótima. Ou ainda, se a capacidade do Setor 1 estiver no intervalo $[0, 800]$ a base atual não muda.

(K) Um diretor da fábrica está considerando a produção de um novo produto que vai necessitar de 2 horas no Setor 1 e 10 horas no Setor 2. O diretor pediu ao nosso colega que calculasse o lucro mínimo deste novo produto para que valha a pena produzi-lo. Que resposta ele deu ao diretor?

Se o produto 5 for produzido, ele competirá por recursos com os outros produtos. Logo, ao se produzir uma unidade do produto 5, ele tira 2 unidades do recurso 1 (isto é, capacidade do setor 1) e tira 10 unidades do recurso 2. Como cada unidade a menos na quantidade disponível do Setor 1 provoca uma diminuição de w_1 unidades no valor da função-objetivo e cada unidade a menos na quantidade disponível do Setor 2 provoca w_2 unidades a menos no valor da função-objetivo, temos que o custo de se produzir 1 unidade do produto 5 é $2w_1 + 10w_2 = 2*1.5+0*10 = 3$. Portanto, o lucro do produto 5 tem que ser maior ou igual a 3, senão a empresa tem prejuízo.

Questão 2: Considere o seguinte problema

$$\begin{array}{rc} \text{Maximize} & z = c^t x \\ \text{sujeito a} & \\ & A_1 x = b_1 \\ & \overline{b_2} \leq A_2 x \leq b_2 \\ & L \leq x \leq U \end{array}$$

(A) Escreva o dual do problema acima.

Vamos quebrar as canalizações em dois blocos de restrições e vamos associar a cada bloco uma variável dual representando aquele bloco

$$\begin{array}{rcl} \texttt{Maximize} & z = c^t x & \\ \texttt{sujeito a} & & \\ & A_1 x = b_1 & \longrightarrow (w_1) \\ & A_2 x \leq b_2 & \longrightarrow (w_2') \\ & -A_2 x \leq -\overline{b}_2 & \longrightarrow (w_2'') \\ & -x \leq -L & \longrightarrow (w_3) \\ & x \leq U & \longrightarrow (w_4) \\ & x \ \texttt{livre} & \end{array}$$

Portanto, o dual será dado por

$$\begin{array}{rc} \texttt{Min} & z_d = b_1^t w_1 + +b_2^t w_2' - \overline{b}_2^t w_2'' - L^t w_3 + U^t w_4 \\ \texttt{sujeito a} & \\ & A_1^t w_1 + A_2^t w_2' - A_2^t w_2'' - I w_3 + I w_4 = c \\ & w_1 \ \texttt{livre} \end{array}$$

$$w_2' \geq 0$$
$$w_2'' \geq 0$$
$$w_3 \geq 0$$
$$w_4 \geq 0$$

(B) Escreva as condições de KKT.

`(Primal Factibilidade)`

$$\begin{aligned}
A_1 x = b_1 \quad & \longrightarrow (w_1) \\
A_2 x \leq b_2 \quad & \longrightarrow (w_2') \\
-A_2 x \leq -\bar{b}_2 \quad & \longrightarrow (w_2'') \\
-x \leq -L \quad & \longrightarrow (w_3) \\
x \leq U \quad & \longrightarrow (w_4)
\end{aligned}$$

`(Dual Factibilidade)`

$$A_1^t w_1 + A_2^t w_2' - A_2^t w_2'' - I w_3 + I w_4 = c$$
$$w_1 \texttt{ livre}$$
$$w_2' \geq 0$$
$$w_2'' \geq 0$$
$$w_3 \geq 0$$
$$w_4 \geq 0$$

`(Folgas Complementares)`

$$(b_2 - A_2 x) w_2' = 0$$
$$(-b_2 + A_2 x) w_2'' = 0$$
$$(-L + x) w_3 = 0$$
$$(U - x) w_4 = 0$$

Questão 3: Considere o problema abaixo

$$\begin{array}{rc}
\text{maximize} & z = 8x_1 + 5x_2 \\
\text{sujeito a} & x_1 + x_2 \leq 6 \\
 & 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 \\
 & x_1, x_2 \text{ inteiros}
\end{array}$$

A solução ótima do problema relaxado é

$$\begin{aligned}
x_2 &= \tfrac{9}{4} - \tfrac{9}{4} x_3 + \tfrac{1}{4} x_4 \\
x_1 &= \tfrac{15}{4} + \tfrac{5}{4} x_3 - \tfrac{1}{4} x_4 \\
z &= \tfrac{165}{4} - \tfrac{5}{4} x_3 - \tfrac{3}{4} x_4
\end{aligned}$$

(A) Construa o corte de Gomory em cima da equação básica de x_1.

Para gerar o corte de Gomory usnado a equação da variábel básica x_1, devemos primeiro reescrever a equação no formato

$$x_1 - 1.25x_3 + 0.25x_4 = 3.75$$

Logo,

$$y_{23} = -1.25 \Longrightarrow I_{23} = -2 \text{ e } F_{23} = -1.25 - (-2) = 0.75$$

$$y_{24} = 0.25 \Longrightarrow I_{24} = 0 \text{ e } F_{24} = 0.25$$

E, o Corte de Gomory é dado por

$$F_2 - F_{23}x_3 - F_{24}x_4 \leq 0 \Longrightarrow 0.75 - 0.75x_3 - 0.25x_4 \leq 0$$

Ou ainda,

$$3x_3 + x_4 \geq 3$$

(B) Plote o corte encontrado no espaço (x_1, x_2).

No espaço (x_1, x_2) a inequação torna-se

$$3x_3 + x_4 = 3(6 - x_1 - x_2) + (45 - 9x_1 - 5x_2) \geq 3$$

Ou,

$$3x_1 + 2x_2 \leq 15$$

(C) Introduza o corte encontrado em (A) e usando o Método Dual Simplex encontre a nova solução ótima.

Vamos introduzir o corte $3x_3+x_4 \geq 3$ nas equações básicas. Ou seja, adicionamos a equação $3x_3+x_4 - x_5 = 3$ nas equações básicas

$$\begin{array}{ll} x_2 & = \frac{9}{4} - \frac{9}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \\ x_1 & = \frac{15}{4} + \frac{5}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \\ x_5 & = -3 + 3x_3 + x_4 \\ z & = \frac{165}{4} - \frac{5}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 \end{array}$$

Como, ao se inserir uma nova restrição, a primal otimalidade não é afetada, vamos restaurar a primal factibilidade perdida através do Método Dual Simplex. A variável que sai da base é a variável x_5, a variável que entra na base é dada pelo

$$\texttt{argmin}\{-\frac{5/4}{3}, -\frac{3/4}{1}\} = 3 \Longrightarrow \text{ a variável } x_3 \text{ entra na base}$$

Portanto, inserindo x_3 e retirando x_5 da base temos as seguintes equações básicas

$$\begin{array}{ll} x_2 & = 0 + x_4 - \frac{3}{4}x_5 \\ x_1 & = 5 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{5}{12}x_5 \\ x_3 & = 1 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 \\ z & = 40 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{5}{12}x_5 \end{array}$$

(D) A solução encontrada em (C) é ótima do problema original (com as restrições de integralidade)? Justifique a resposta.

Olhando nas equações básicas do item (C), concluímos que estamos no ótimo do problema relaxado. Como o ótimo do problema relaxado é inteiro então estamos no ótimo do problema original.

Questão 4: Mostre que se o problema Min $c^t x$ sujeito a $Ax = b, x \geq 0$ tem uma solução ótima finita entao o novo problema Min $c^t x$ sujeito a $Ax = \bar{b}, x \geq 0$ não pode ser ilimitado independentemente do valor que o vetor $\bar{b}$ possa assumir.

Considere o seguinte problema

$$\begin{array}{rc} \text{Min} & z_p = c^t x \\ \text{sujeito a} & \\ & Ax = \bar{b} \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Suponha que a solução deste problema seja ilimitada. Logo, o dual dele e infactível, isto é,

$$\begin{array}{rc} \text{Max} & z_d = \bar{b}^t w \\ \text{sujeito a} & \\ & A^t w \leq c \\ & w \text{ livre} \end{array}$$

é infactível. Assim sendo, o problema

$$\begin{array}{rc} \text{Max} & z_d = b^t w \\ \text{sujeito a} & \\ & A^t w \leq c \\ & w \text{ livre} \end{array}$$

também será infactível. Mas, o dual do problema acima ou é ilimitado ou é infactível. Mas, o dual do problema acima é

$$\begin{array}{rc} \text{Min} & z_p = c^t x \\ \text{sujeito a} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

que é o problema original que é dito ter solução ótima finita. Portanto, temos uma contradição e concluímos que o dual do problema original não pode ser ilimitado não importa com que b.

Pontuação:

Questão	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	2A	2B	3A	3B	3C	3D	4
Pontos	1	3	1	2	2	1	2	3	3	3	3	7	5	5	2	6	1	12