

## CAPÍTULO I – MODELAGEM MATEMÁTICA

### I - Introdução

*Modelagem matemática* é uma técnica de representação quantitativa de processos e problemas reais. Usualmente, classificam-se os modelos matemáticos como *prescritivos* ou *descritivos* :



- Os *modelos prescritivos* baseiam-se na representação dos objetivos e restrições de um processo para o qual se deseja descobrir soluções otimizadas, ou seja, o modelo é escrito segundo uma técnica que permite encontrar a melhor solução ou política de ação para os condicionantes representados. Tais modelos podem ser resolvidos de maneira exata ou aproximados. Na maneira exata, a solução obtida é a melhor solução, dentre todas as possíveis, dados os condicionantes do problema modelado. A solução otimiza (maximiza ou minimiza) uma função de mérito (por exemplo, o custo total de produção) e ao mesmo tempo respeita (não viola) todas as restrições do problema (por exemplo, satisfazer a demanda). Mas, dependendo do tipo de problema a ser resolvido, pode ser extremamente caro, computacionalmente falando, tentar resolvê-lo de maneira exata. Por exemplo, um *problema de programação linear contínuo* (isto é, que não contenha variáveis inteiras em sua formulação) pode ser resolvido de maneira exata e eficientemente mesmo que contenha milhares (e, às vezes, milhões) de variáveis e restrições, pois há métodos polinomiais<sup>1</sup> (eficientes) para isso. Já se o problema for de *programação linear mista* (contendo variáveis contínuas e inteiras), então devemos analisar caso a caso e decidir se pode resolvê-lo de maneira exata ou aproximada (heurísticamente). Resolver o problema de maneira aproximada significa que o método utilizado não pode garantir que obtenhamos a solução ótima em todos cenários resolvidos por ele. O que se pode garantir é uma solução de “boa qualidade” com baixo custo computacional. Isto não quer dizer absolutamente que devemos resolver todos os problemas grandes e caros computacionalmente de maneira aproximada.

- Os modelos descritivos são utilizados na representação de sistemas reais (ou propostos) e a experimentação de diferentes cenários e políticas de ação nos mesmos. A grande motivação para o uso dessas técnicas é a flexibilidade na representação de modelos complexos e a facilidade

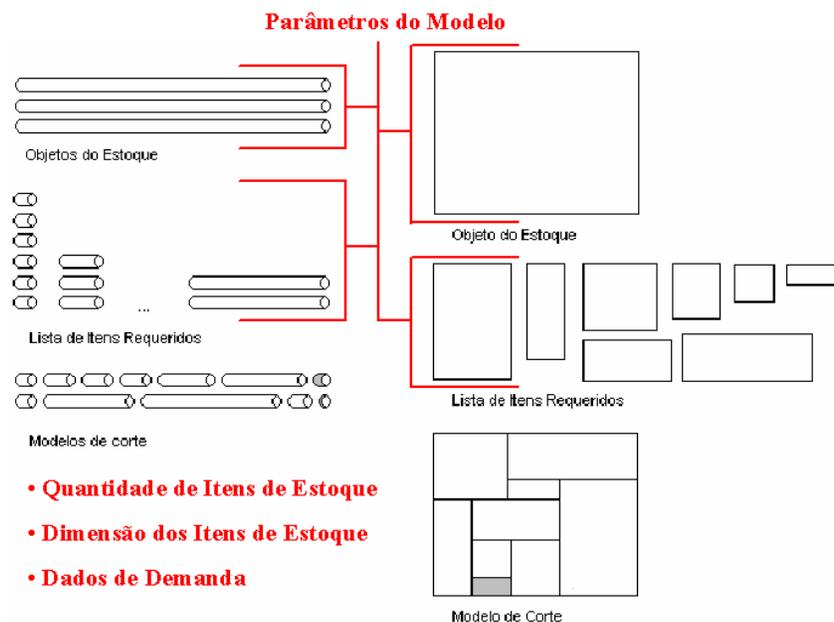
<sup>1</sup> Informalmente falando, um método é polinomial quando para quaisquer exemplares de uma mesma classe de problema, se o tamanho do problema cresce (número de variáveis e restrições) o tempo de execução cresce segundo uma função polinomial, ou seja, cresce de maneira suave.

## Capítulo I - Modelagem Matemática

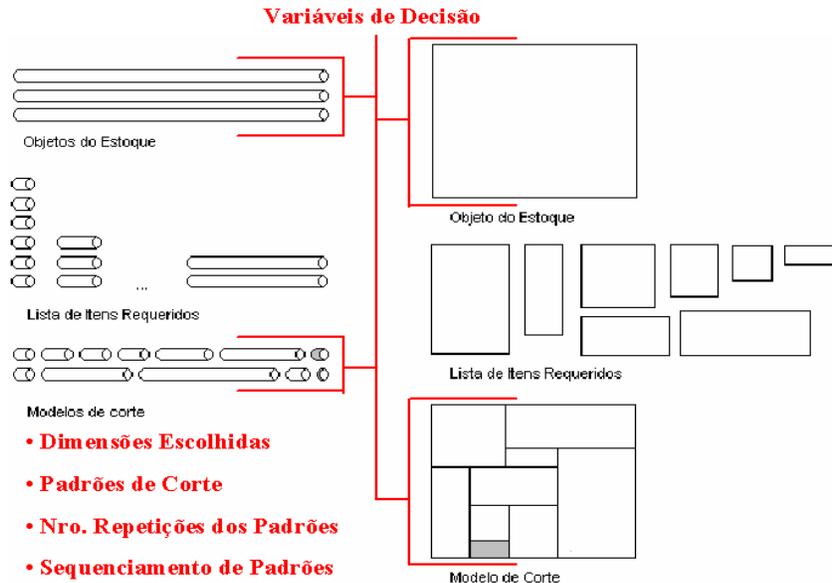
de aplicação, possibilitando prever o comportamento de um sistema modelado em um horizonte de planejamento escolhido. Os resultados dos experimentos apresentam uma visão futura do sistema, auxiliando no processo de tomada de decisões no momento presente. Diferentemente dos métodos prescritivos, os modelos descritivos são utilizados para comparar políticas de ação já escolhidas pelo decisor, não esperando que o modelo indique a melhor solução possível. Por exemplo, suponha que buscamos testar duas políticas de filas em um banco: política 1 - cada caixa tem sua própria fila e política 2 - uma fila única para todos os caixas. Neste caso, podemos supor que o atendimento será baseado em uma distribuição de Poisson e que os clientes chegam ao banco baseados em uma distribuição Exponencial Negativa. Depois, simulamos as duas políticas, levando em conta as distribuições envolvidas para verificar qual das duas é a melhor.

No processo de modelagem devemos levar em conta alguns elementos básicos :

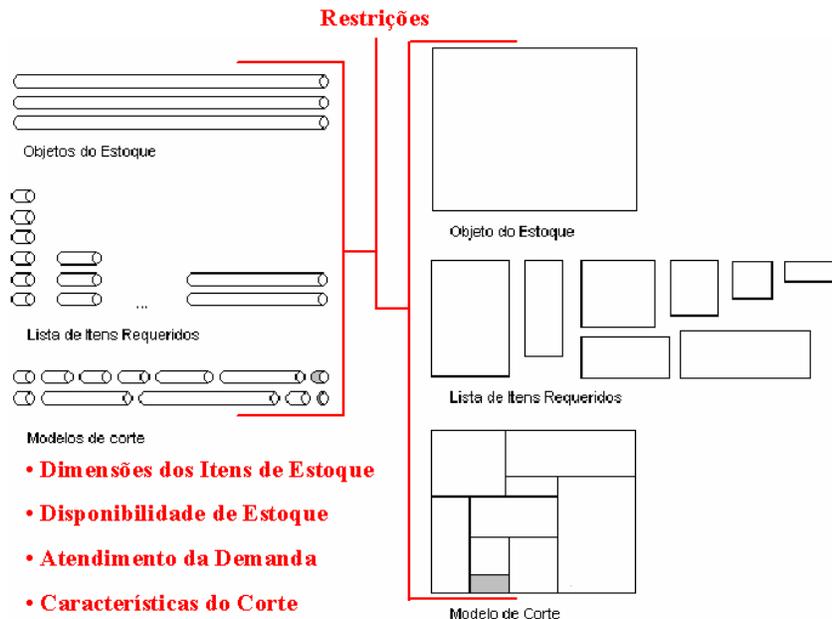
*Parâmetros do modelo:* são todos os dados conhecidos do processo, utilizados como valores de entradas do modelo. Por exemplo, em um planejamento de produção de uma indústria, se queremos esquematizar as tarefas nas máquinas da linha de produção, precisamos saber o tempo de processamento de cada tarefa em cada máquina, o tempo de setup, as capacidades das máquinas, as disponibilidades de mão-de-obra, etc. Em um problema de distribuição, precisamos das distâncias entre os clientes e distribuidores, da demanda dos clientes, da disponibilidade de estoque em cada centro de distribuição, etc. Em um problema de corte de materiais, precisamos saber a quantidade dos itens em estoque, a dimensão dos itens em estoque, os dados da demanda, etc.



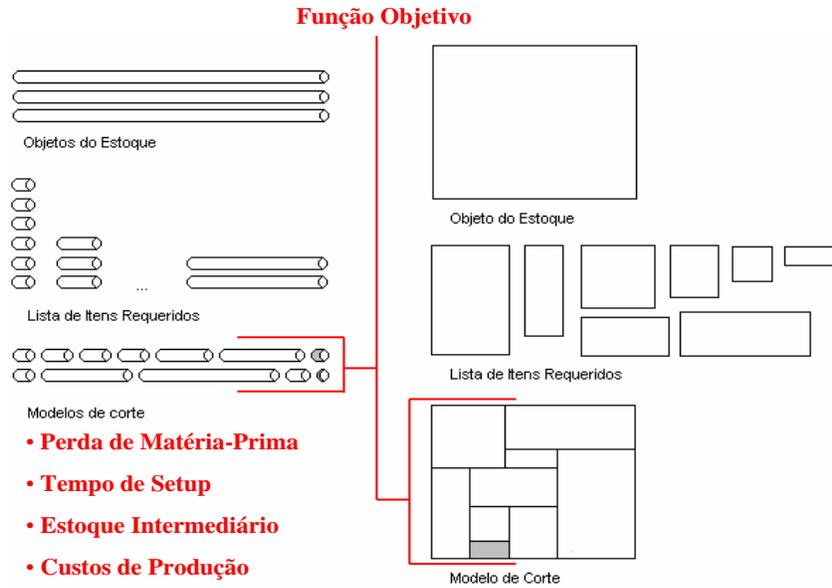
*Variáveis de Decisão:* são as incógnitas do modelo. Seus valores interferem na performance do sistema e o modelo opera como um mecanismo de melhoria dentro de um intervalo operacional. Utilizando os mesmos exemplos, a seqüência com que as tarefas serão executadas nas máquinas é uma variável de decisão no modelo de esquematização (note que se esta seqüência sofrer alterações, o tempo total do processo também sofrerá). Para o modelo de distribuição, uma variável importante é a associação de atendimento entre centros de distribuição e clientes. Para o problema de corte, as dimensões dos objetos de estoque escolhidas para corte, os padrões de corte, as repetições e o seqüenciamento dos padrões são variáveis de decisão.



*Restrições:* estabelecem condicionantes entre as variáveis de decisão e a dinâmica do sistema, indicando as limitações físicas, disponibilidades de material e as necessidades a serem atendidas pelo processo a ser modelado. Por exemplo, o tempo disponível de operação das máquinas a serem seqüenciadas; o número de caminhões disponíveis a serem utilizados no plano de distribuição; as características dos cortes possíveis, etc.



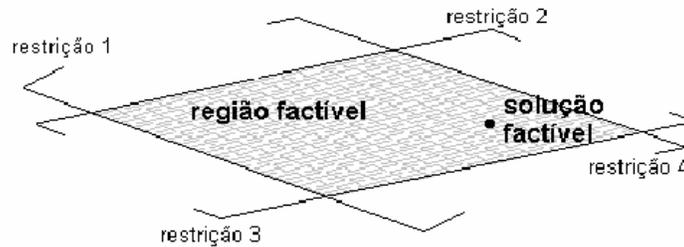
*Função Objetivo:* é a representação matemática do objetivo a ser atendido pelo modelo. A função objetivo mede a eficiência de cada solução possível. Pode-se citar como exemplos, o custo ou tempo de produção; o custo de transporte na distribuição; o nível de atendimento dos pedidos; a perda de material ou a geração de estoques intermediários.



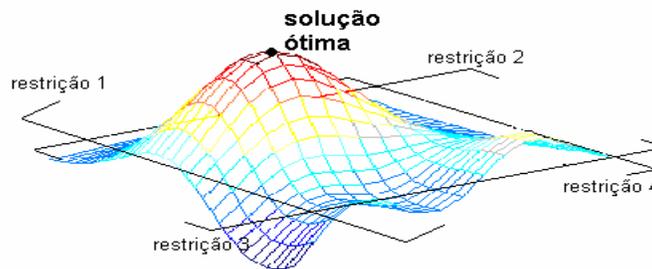
Em conjunto com os elementos básicos do modelo estão associados os conceitos de:

*Solução Factível:* é uma solução que respeita todas as restrições do problema e, portanto, é possível ser implementada.

*Região Factível:* é a região formada por todas as soluções factíveis, isto é, formada pela interseção das restrições do problema.



*Solução Ótima:* é a melhor solução factível encontrada, de acordo com a função .



## II - Formulação Geral de um Modelo Matemático

Formalmente, um modelo matemático é escrito da seguinte maneira:

$$\text{Maximizar/ Minimizar } f(x)$$

sujeito a :

$$g(x) \geq a$$

$$h(x) \leq b$$

$$s(x) = c$$

$$l \leq x \leq u$$

Em que  $f(x)$  é uma função, linear ou não linear, a ser otimizada (maximizada ou minimizada) sujeito às restrições (lineares ou não lineares) que indicam uma necessidade a ser satisfeita (“maior ou igual”), uma disponibilidade a ser respeitada (“menor ou igual”) ou um condicionante a ser satisfeito de maneira exata (“igual”).

Pode-se classificar os modelos de acordo com:

### (1) Existência de restrições:

(a) *Otimização Irrestrita*: a função a ser otimizada não está sujeita a nenhum condicionante do sistema. Por exemplo, suponha que você queira ir da sua casa para o trabalho pelo menor caminho. Modelado matematicamente, uma solução seria o menor entre todos os caminhos possíveis, saindo de sua casa e chegando ao seu trabalho (a função objetivo poderia ser a distância dos percursos escolhidos ou uma ponderação entre distância, número de semáforos, topografia das ruas percorridas, etc).

(b) *Otimização Restrita*: suponha que o menor caminho que vai de sua casa até o seu trabalho passe por uma região da cidade onde há uma grande incidência de assaltos. Portanto, você gostaria de saber o menor caminho de sua casa até o trabalho evitando passar por esta área, gerando uma restrição de região indesejada.

### (2) Natureza das Variáveis:

(a) *Modelos Discretos*: a região factível é formada por um conjunto discreto de alternativas. Um bom exemplo é a programação linear inteira (PLI) em que as variáveis de decisão devem ser inteiras ou binárias. Há também casos em que as variáveis devem pertencer a um conjunto e os elementos não precisam ser necessariamente inteiros (considere, por exemplo, o modelo para determinar a quantidade de latas de tintas  $\{1/2, 1, 3/2, 2, \dots\}$  a serem compradas de tal forma a minimizar o custo total de compra).

(b) *Modelos Contínuos*: neste caso, a região factível é contínua, ou seja, não há restrições de integralidade sobre as variáveis de decisão.

### (3) Natureza das Restrições e Função Objetivo:

(a) *Otimização Não-Linear* : se a função objetivo ou uma das restrições é não-linear, então o modelo é não-linear e a resolução computacional é mais complexa. Se há alguma informação sobre a função (convexa/côncava, diferenciável ou não) e sobre as restrições, então os métodos podem ser mais eficientes, caso contrário pode ser muito caro resolver modelos não-lineares de maneira exata.

(b) *Otimização Linear* : a função objetivo e as restrições são lineares. Neste caso, há vários algoritmos eficientes para resolver tais problemas. Por exemplo, o *Método Simplex*,

## Capítulo I - Modelagem Matemática

desenvolvido por George Dantzig em 1947, continua ainda hoje sendo uma boa opção para resolver problemas de programação linear. Há também os métodos de *Pontos Interiores* que deram um grande impulso na resolução de modelos lineares, fazendo com que problemas de grande porte pudessem ser manipulados com mais agilidade.

### (4) Número de Objetivos do Modelo:

(a) *Otimização Escalar*: quando há apenas uma função objetivo a ser otimizada.

(b) *Otimização Multi-Objetivo*: quando há dois ou mais objetivos a serem otimizados. Os objetivos podem ser conflitantes ou não-comensuráveis e em geral, são tratados por métodos específicos de *programação multi-objetivo*. Existem também técnicas de *escalarização*, que transformam os objetivos em um único (com pesos diferentes para cada objetivo, dependendo da prioridade de cada um), resultando em um problema de otimização escalar.

### (5) Dinâmica dos Dados de Entrada:

(a) *Modelos Estáticos*: servem para se ter uma noção macro do sistema modelado. Por exemplo, ao se fazer o planejamento para o próximo ano, o gerente de produção de uma indústria deseja saber quantas caixas deve comprar para acondicionar o seu produto. Neste caso, ele precisa apenas ter uma ordem de grandeza razoável do quanto será sua produção, não sendo necessário ter o plano de produção que demandaria muito mais variáveis e tempo de computação para ser resolvido.

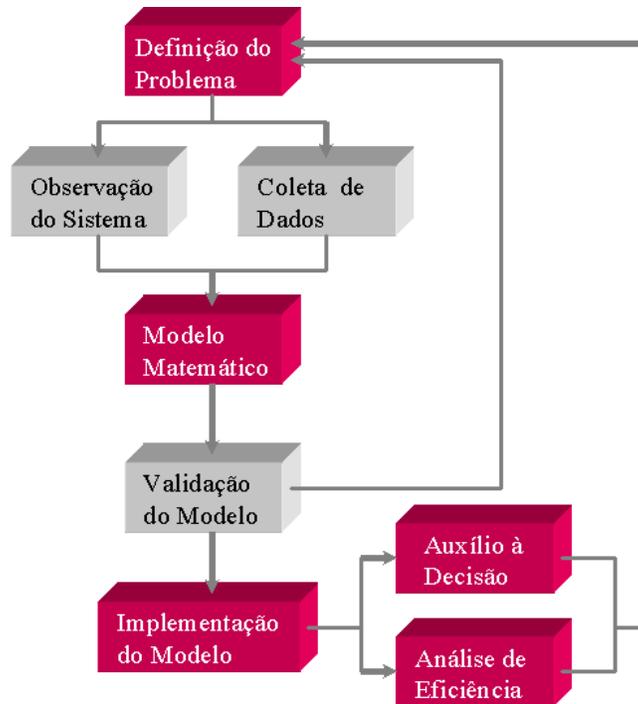
(b) *Modelo Dinâmico*: quando o processo exige uma identificação mais precisa das ações a serem tomadas no tempo. No exemplo acima, pode-se querer o plano de produção diária da empresa. Neste caso, a variável tempo deve guiar todo o conjunto de condicionantes do sistema.

## III - O Processo de Modelagem

O processo de modelagem envolve a observação do sistema real, a definição do problema a ser modelado (deve-se fazer a coleta de dados de maneira precisa), a definição do objetivo a ser otimizado e como as restrições interagem com este objetivo. Uma vez definida a função objetivo e suas restrições, o modelador escreve o modelo matemático que deverá ser validado através da aplicação em cenários reais. Após o modelo ser validado, faz-se a implementação final do mesmo, que poderá ser usado com uma ferramenta de tomada de decisões ou como uma ferramenta de análise de eficiência do sistema atual.

A modelagem é um processo contínuo e todo modelo deve ser elaborado com perspectivas de expansão. Neste caso, o modelador deve escolher ferramentas (linguagens algébricas e solvers) que possibilitem e facilitem alterações nas restrições e objetivos do modelo.

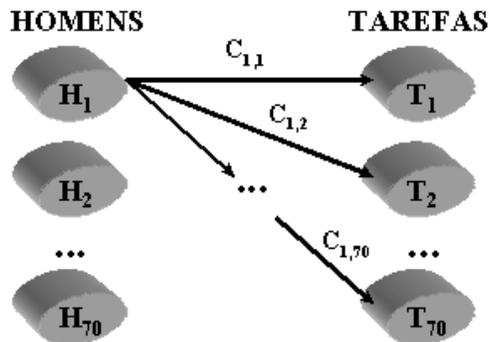
A figura a seguir ilustra as várias etapas do processo de modelagem:



#### IV - A Importância da Modelagem Matemática

Nos exemplos abaixo, pretendemos motivar o leitor a trabalhar com modelos matemáticos. Para tanto, inicialmente vamos comparar o desempenho de um modelo com um método de enumeração de soluções:

Vamos supor que temos 70 homens que devem ser designados a 70 tarefas distintas. Para cada designação homem-tarefa há um valor que indica o desempenho daquele homem na execução daquela tarefa. O problema apresenta duas restrições: (1) cada homem deve ser designado a apenas uma tarefa e (2) cada tarefa deve ser alocada a um único homem. O grafo bipartito abaixo (duas partições: uma para representar o conjunto dos homens e outra para representar o conjunto das tarefas) representa a estrutura do problema:



O objetivo neste caso é determinar uma alocação que maximize a performance total, ou seja, descobrir qual homem designar à qual tarefa (cada alocação tem uma performance envolvida) de tal maneira que a soma total das performances envolvidas nesta designação seja a maior possível. Por exemplo, se a solução fosse :

SOLUÇÃO 1

Hom em 1	Homem 22	Hom em 5	...	Hom em 18	Hom em 47
<b>tarefa 1</b>	<b>tarefa 2</b>	<b>tarefa 3</b>		<b>tarefa 69</b>	<b>tarefa 70</b>

e considerando que  $P_{ij}$  indica a performance do homem  $i$  ao executar a tarefa  $j$ , a solução 1 teria uma performance total de  $P_{1,1}+P_{22,2}+P_{5,3}+\dots+P_{18,69}+P_{47,70}$ . Já a solução 2 abaixo:

SOLUÇÃO 2

Hom em 10	Homem 69	Hom em 1	...	Hom em 50	Hom em 3
<b>tarefa 1</b>	<b>tarefa 2</b>	<b>tarefa 3</b>		<b>tarefa 69</b>	<b>tarefa 70</b>

apresenta performance total de  $P_{10,1}+P_{69,2}+P_{1,3}+\dots+P_{50,69}+P_{3,70}$ . Portanto, se formos enumerar todas as possíveis soluções para este pequeno problema e depois escolher a melhor combinação, teríamos 70! possíveis soluções distintas. Mas, 70! é maior do que  $10^{100}$ , que é um número muito, muito grande.

Suponha agora que um computador pudesse avaliar 1 bilhão de designações por segundo (isto é, uma vez dada uma designação do tipo solução 1 ou solução 2, somar e calcular a performance daquela designação) e este computador estivesse trabalhando desde a época do BIG-BANG, aproximadamente 15 bilhões de anos atrás: hoje não teríamos a melhor designação! Quer ver por quê? É só acompanhar os cálculos:

$$1 \text{ dia} = 24 \times 60 \times 60 = 86400 \text{ segundos}$$

$$1 \text{ ano} = 86400 \times 365 = 31536000 \text{ segundos}$$

o que significa que o número total de designações que tal computador poderia executar durante um ano é da ordem de  $3.1536 \times 10^{16}$ . Portanto, o número total de designações desde o Big Bang é da ordem de  $47.304 \times 10^{25} < 10^{100}$ . Vamos então supor que a Terra fosse preenchida com tais computadores trabalhando em paralelo desde a época do Big Bang. Para tanto, calculamos a área da base de um computador comum e depois calculamos quantos desses computadores caberiam na superfície da Terra:

$$\text{Raio da Terra} = 6370 \text{ km}$$

$$\text{Área da Superfície Terrestre} = 5.099 \times 10^8 \text{ Km}^2$$

$$\text{Área da Base do Computador (43 cm x 20 cm)} = 860 \text{ cm}^2 = 8.6 \times 10^{-8} \text{ Km}^2$$

gerando um total de  $5.9291 \times 10^{15}$  computadores trabalhando em paralelo. Portanto, o número total de designações desde o Big Bang seria da ordem de  $47.304 \times 10^{25} \times 5.9291 \times 10^{15} = 2.805 \times 10^{42} < 10^{100}$ .

Vamos exagerar supondo que tenhamos  $10^{50}$  Terras, todas preenchidas com tais computadores trabalhando em paralelo desde o Big Bang até hoje, será que teríamos a solução ótima em mãos? É fácil conferir que não, pois  $2.805 \times 10^{42} \times 10^{50} = 2.805 \times 10^{92} < 10^{100}$ .

Mas, se houvessem  $10^{50}$  Terras preenchidas com tais computadores trabalhando em paralelo desde o Big Bang até que o Sol se tornasse uma imensa pedra de gelo, talvez obtivéssemos a resposta (talvez).

O exemplo é para mostrar que se atacarmos um problema de maneira errada (com um procedimento aparentemente lógico e simples mas ineficiente), podemos gerar um custo computacional absurdo e não obter a solução do problema.

Antes do *Método Simplex* não havia uma maneira sistemática para resolver problemas de programação linear. A técnica de modelagem matemática era conhecida, mas não existiam ferramentas para a sua resolução. Logicamente, aplicavam-se estratégias para a obtenção de soluções (nada que garantisse soluções ótimas). Com o *Método Simplex*, os problemas de

## Capítulo I - Modelagem Matemática

programação linear começaram a ser resolvidos sem dificuldade (a memória dos computadores era o único obstáculo).

Vejamos o que acontece com o tempo computacional para se obter a solução ótima do problema de atribuição homem-tarefa ao modelá-lo matematicamente :

As variáveis de decisão para este problema são :

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se o homem } i \text{ é associado à tarefa } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como vemos, as variáveis são binárias, ou seja, assumem apenas os valores 0 ou 1.

Os parâmetros do nosso modelo são as medidas de performance  $P_{ij}$ , indicando o desempenho do homem  $i$  ao realizar a tarefa  $j$ .

O objetivo é maximizar a performance total, dada pela fórmula:

$$\begin{aligned} & (P_{1,1}x_{1,1} + \dots + P_{1,70}x_{1,70}) + (P_{2,1}x_{2,1} + \dots + P_{2,70}x_{2,70}) + \dots + (P_{70,1}x_{70,1} + \dots + P_{70,70}x_{70,70}) = \\ & = \sum_{i=1}^{70} \sum_{j=1}^{70} P_{ij} x_{ij} \end{aligned}$$

em que o primeiro parêntesis corresponde a todas as possibilidades de alocação para o homem 1, o segundo parêntesis contém todas as possibilidades para o homem 2 e assim por diante até o homem 70. Observe que em cada parêntesis apenas uma variável  $x_{i,j}$  assumirá o valor 1 e as demais dentro daquele parêntesis serão iguais a zero. Isto faz com que dentro de cada parêntesis apenas um valor de performance seja considerado.

As restrições são de dois tipos :

- *Um Homem deve ser designado a apenas uma tarefa* : se as variáveis são binárias e sua definição indica que se  $x_{i,j}=1$ , o homem  $i$  realiza a tarefa  $j$ , basta dizer que se  $x_{1,1}+x_{1,2}+x_{1,3}+\dots+x_{1,69}+x_{1,70}=1$ , então apenas uma variável será igual a 1 e consequentemente, o homem 1 será designado a apenas uma tarefa (observe que se as variáveis não fossem binárias poderíamos ter  $x_{1,4}=0.5$  e  $x_{1,58}=0.5$ ). O mesmo raciocínio se aplica aos demais homens:

$$\text{para } i = 1, \sum_{j=1}^{70} x_{1,j} = x_{1,1} + x_{1,2} + \dots + x_{1,69} + x_{1,70} = 1$$

$$\text{para } i = 2, \sum_{j=1}^{70} x_{2,j} = x_{2,1} + x_{2,2} + \dots + x_{2,69} + x_{2,70} = 1$$

e assim até,

$$\text{para } i = 70, \sum_{j=1}^{70} x_{70,j} = x_{70,1} + x_{70,2} + \dots + x_{70,69} + x_{70,70} = 1$$

gerando o conjunto de restrições :

$$\sum_{j=1}^{70} x_{ij} = 1 \quad \text{para todo } i = 1, \dots, 70$$

## Capítulo I - Modelagem Matemática

Repare que o bloco de restrições acima não evita que uma tarefa seja alocada a dois homens diferentes. Logo, precisamos do seguinte um bloco de restrições:

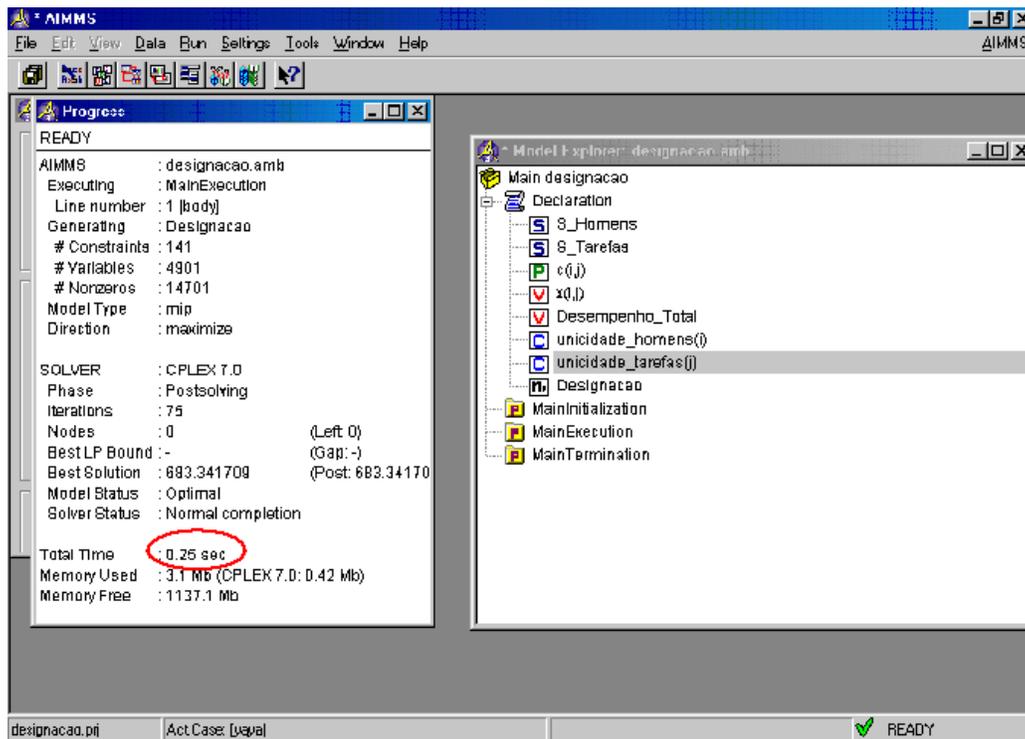
- *Uma tarefa deve ser associada a um único homem:*

$$\sum_{i=1}^{70} x_{ij} = 1 \quad \text{para todo } j = 1, \dots, 70$$

Em resumo, o modelo para o problema da designação seria:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && \sum_{i=1}^{70} \sum_{j=1}^{70} p_{ij} x_{ij} \\ &\text{sujeito a} && \sum_{j=1}^{70} x_{ij} = 1 \quad \text{para todo } i = 1, 2, \dots, 70 \\ &&& \sum_{i=1}^{70} x_{ij} = 1 \quad \text{para todo } j = 1, 2, \dots, 70 \\ &&& x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{para todo } i, j = 1, 2, \dots, 70 \end{aligned}$$

Ao resolver este modelo matemático, utilizando um pacote computacional específico para problemas de programação linear (*AIMMS - Advanced Integrated Multidimensional Modeling Software* da empresa holandesa Paragon Decision Technology B.V), obtém-se a solução ótima em 0.25 segundos.



## Capítulo I - Modelagem Matemática

O leitor pode estar se perguntando se antes do *Método Simplex* os modeladores tentavam resolver os problemas através de enumeração explícita como feito no exemplo acima. A resposta é não. Os modeladores usavam métodos baseados em regras (heurísticas) para obtenção de soluções sub-ótimas (não era possível afirmar que a solução encontrada era ótima, sendo apenas possível checar sua qualidade através de sua implementação na prática). Vamos utilizar um exemplo menor e tentar uma heurística:

Considere o problema de designação de 4 homens a 4 tarefas. A tabela abaixo fornece as performances de cada homem em cada tarefa:

Desempenho	Tarefa 1	Tarefa 2	Tarefa 3	Tarefa 4
<b>Homem 1</b>	1	2	9	3
<b>Homem 2</b>	1	5	8	3
<b>Homem 3</b>	4	6	7	5
<b>Homem 4</b>	2	5	6	4

Uma primeira idéia seria escolher um homem ao acaso e designar a ele a tarefa que ele faz melhor. Podemos também escolher uma solução baseada em uma *estratégia gulosa*, que nos diria para olhar a tabela e selecionar a melhor performance possível. Neste caso, o valor 9 na interseção da linha do homem 1 com a tarefa 3. Logo, o homem 1 fica alocado para a tarefa 3. Para garantir que o homem 1 não seja alocado a mais de uma tarefa, devemos eliminar a linha do homem 1 e a coluna da tarefa 3 da tabela.

Desempenho	Tarefa 1	Tarefa 2	Tarefa 3	Tarefa 4
<b>Homem 1</b>	<del>1</del>	<del>2</del>	9	<del>3</del>
<b>Homem 2</b>	1	5	<del>8</del>	3
<b>Homem 3</b>	4	6	<del>7</del>	5
<b>Homem 4</b>	2	5	<del>6</del>	4

Agora, olhando a tabela resultante e aplicando o mesmo raciocínio, percebe-se que a melhor performance (valor 6) se encontra na interseção do homem 3 com a tarefa 2. Alocando o homem 3 à tarefa 2 e eliminando a linha e a coluna correspondentes, obtém-se a tabela resultante abaixo:

Desempenho	Tarefa 1	Tarefa 2	Tarefa 3	Tarefa 4
<b>Homem 1</b>	<del>1</del>	<del>2</del>	9	<del>3</del>
<b>Homem 2</b>	1	<del>5</del>	<del>8</del>	3
<b>Homem 3</b>	<del>4</del>	6	<del>7</del>	<del>5</del>
<b>Homem 4</b>	2	<del>5</del>	<del>6</del>	4

A melhor performance agora está na interseção do homem 4 com a tarefa:

Desempenho	Tarefa 1	Tarefa 2	Tarefa 3	Tarefa 4
<b>Homem 1</b>	<del>1</del>	<del>2</del>	9	<del>3</del>
<b>Homem 2</b>	1	<del>5</del>	<del>8</del>	3
<b>Homem 3</b>	<del>4</del>	6	<del>7</del>	<del>5</del>
<b>Homem 4</b>	<del>2</del>	<del>5</del>	<del>6</del>	4

Agora, só nos resta alocar o homem 2 à tarefa 1.

Desempenho	Tarefa 1	Tarefa 2	Tarefa 3	Tarefa 4
Homem 1	1	1	9	1
Homem 2	1	1	1	1
Homem 3	1	6	1	1
Homem 4	2	1	1	4

A performance total da solução obtida por este procedimento é  $P_{1,3}+P_{2,1}+P_{3,2}+P_{4,4}=20$ .

Ao resolver o modelo matemático do problema de designação com estes dados obtém-se uma performance de 22:

The screenshot displays two windows from a software application. The left window, titled 'Apresentacao', contains a table of performance values and a diagram showing the optimal assignment. The table is as follows:

		Desempenho			
		tarefa1	tarefa2	tarefa3	tarefa4
homem1		1.00	2.00	9.00	3.00
homem2		1.00	5.00	8.00	3.00
homem3		4.00	6.00	7.00	5.00
homem4		2.00	5.00	6.00	4.00

The diagram below the table shows arrows indicating the optimal assignment: Homem 1 to Tarefa 1, Homem 2 to Tarefa 2, Homem 3 to Tarefa 3, and Homem 4 to Tarefa 4. Below the diagram, a text box shows 'Desempenho\_Total = 22.0'.

The right window, titled 'Progress', shows the solver's status. It indicates that the problem is solved optimally with a total performance of 22.0. The solver status is 'Normal completion' and the model status is 'Optimal'. The total time taken is 0.00 seconds, and the memory used is 1.7 Mb.

Você pode observar que mesmo em um problema pequeno (4 homens e 4 tarefas), a aplicação de uma heurística razoável forneceu uma solução inferior que aquela obtida pelo modelo matemático (solução ótima). Como já dissemos, uma heurística não garante a obtenção da solução ótima e sim, soluções de boa qualidade em um tempo computacional adequado. Logicamente, a decisão de se aplicar uma heurística ou um método exato fica por conta do tipo de problema que temos em mãos:

(1) considere o problema de esquematizar tarefas à máquinas em que além de restrições de disponibilidade de tempo de máquina têm-se restrições de precedência - o modelo matemático para este problema é bem mais complexo que o primeiro e muito mais caro computacionalmente.

(2) Suponha que você esteja trabalhando em um problema de alocar médicos em salas de emergência, considerando alguns condicionantes pessoais dos médicos. O chefe da emergência leva de dois a três meses para preparar uma alocação para o próximo ano. Se você propõe um

## Capítulo I - Modelagem Matemática

modelo matemático que fornece solução exata em 15 horas de computação, seria mais do que aceitável,

Na prática, ao visitarmos uma empresa para levantamento dos dados para modelagem, realizamos um conjunto de entrevistas com os responsáveis pelo processo, tentando identificar a seqüência de ações nas soluções manuais empregadas, o que gera subsídios para a construção de heurísticas ou modelos que resolvam os problemas identificados. Na maioria das ocasiões, os procedimentos das empresas são baseados em intuição, adquirida após anos de experiência. O exercício de fixação a seguir mostra que nem sempre a intuição é a melhor aliada na resolução de problemas de natureza combinatorial

### Exercício de Fixação

**(Flow Shop):** Considere uma estrutura de produção na qual cada tarefa necessita de  $m$  operações para a sua finalização, realizada sequencialmente em cada uma das  $m$  máquinas disponíveis. Nessa estrutura, a tarefa  $t$  deve passar por todas as máquinas (da 1 à 4, nessa ordem) e só pode ser processada na máquina  $i$  se antes passou pela máquina  $i-1$ . Considere o problema de esquematizar 2 tarefas em 4 máquinas com o objetivo de completar as tarefas no menor tempo total possível. Os tempos necessários de processamento de cada tarefa em cada máquina são dados na tabela abaixo:

	Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3	Máquina 4
Tarefa 1	1	4	4	1
Tarefa 2	4	1	1	4

Propomos uma representação do problema usando um *Gráfico de Gantt*, em que as linhas correspondem às máquinas e as colunas às unidades de tempo:

Máquina 1															
Máquina 2															
Máquina 3															
Máquina 4															
Tempo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Vamos começar alocando a tarefa 1 na máquina 1, o que ocupa 1 unidade de tempo da máquina (lembre-se que as tarefas devem passar primeiro pela máquina 1, depois pela máquina 2, depois pela máquina 3 e finalmente pela máquina 4). Ao alocar a tarefa 1 na máquina 1, só poderemos alocar a tarefa 2 nessa máquina após o término da tarefa 1. Seguindo essa lógica, o gráfico de Gantt ficaria:

Máquina 1	T1	T2	T2	T2	T2										
Máquina 2		T1	T1	T1	T1	T2									
Máquina 3						T1	T1	T1	T1	T2					
Máquina 4										T1	T2	T2	T2	T2	
Tempo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

A solução acima respeita as condições de Flow Shop e nos dá um tempo total de 14 unidades para completar a última tarefa do sistema. Como queremos minimizar o tempo total de saída da última tarefa, temos que, pela nossa intuição, as máquinas não devem ficar ociosas em nenhum período. Agora repare o que acontece se a máquina 3 ficar ociosa 1 unidade de tempo para que a tarefa 2 possa ser iniciada no lugar da tarefa 1:

## Capítulo I - Modelagem Matemática

Máquina 1	T1	T2	T2	T2	T2										
Máquina 2		T1	T1	T1	T1	T2									
Máquina 3							T2	T1	T1	T1	T1				
Máquina 4								T2	T2	T2	T2	T1			
Tempo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Seriam necessárias 12 unidades de tempo (solução ótima para o problema), indicando que a intuição falharia nesse problema tão simples. Imagine em problemas reais!

### Exercícios Propostos

**Problema 1.1.** [Winston,pg 54] Um fazendeiro deseja determinar quantos acres de milho e trigo deve plantar neste ano. Um acre de trigo rende 25 toneladas por ano e requer 10 horas de trabalho por semana. Um acre de milho rende 10 toneladas por ano e requer 4 horas de trabalho por semana. O trigo pode ser vendido a R\$ 4,00/Kg e o milho pode ser vendido a R\$ 3,00/Kg. O fazendeiro planeja alocar 7 acres de terra para estes plantios e 40 horas por semana de trabalho. Leis governamentais requerem que seja produzido pelo menos 30 toneladas de milho por ano. Dê uma solução de plantio para nosso amigo fazendeiro que obedeça os condicionantes do problema: (a) Não ultrapasse 7 acres e (b) não use mais do que 40 horas de trabalho por semana. Qual seria o lucro do fazendeiro se ele decidisse implementar a sua solução?

**Problema 1.2.** [Winston,pg 54] Uma fábrica produz dois tipos de caminhões: Caminhão 1 e Caminhão 2. Cada caminhão deve passar pelo setor de pintura e pelo setor de montagem. Se o setor de pinturas fosse dedicado apenas a pintar caminhões do tipo 1, então poderiam pintar 800 caminhões do tipo 1 por dia. Por outro lado, se fosse dedicado à pintura apenas de caminhões do tipo 2, então 700 caminhões do tipo 2 seriam pintados por dia. No caso de dedicação exclusiva do setor de montagens, teríamos 1500 caminhões do tipo 1 montados por dia, e 1200 caminhões do tipo 2 seriam montados por dia. Cada caminhão do tipo 1 dá um lucro de R\$ 300,00 e do tipo 2 dá um lucro de R\$ 500,00. Dê uma solução para o problema acima e calcule o seu lucro.

**Problema 1.3.** Uma empresa de artigos esportivos precisa decidir quantas bolas de futebol produzir em um horizonte de planejamento de 6 meses. As demandas previstas a serem atendidas são de 10000, 15000, 30000, 35000, 25000 e 10000 unidades para os próximos 6 meses. A empresa conta com 5000 bolas em estoque e pode utilizar a produção mensal para o atendimento da demanda daquele mês (por simplicidade, assume-se que a produção ocorre durante o mês e o atendimento da demanda ocorre no final do mês). A capacidade de produção mensal da empresa é de 30000 bolas e a estocagem de produtos é limitada a 10000 unidades (no final do mês, após o atendimento da demanda). Os custos previstos de produção por unidade nos próximos 6 meses são de \$12.50, \$12.55, \$12.70, \$12.80, \$12.85 e \$12.95, respectivamente. O custo por bola mantida em estoque no final do mês é de 5% do custo de produção da bola naquele mês. O preço de venda das bolas não é relevante nas decisões de produção porque a empresa deve satisfazer as demandas exatamente como estão estabelecidas. O objetivo é minimizar os custos de produção e estoque.

**Problema 1.4.** [Winston,pg 73] Uma agência de correios será aberta. Ela necessita de um número diferente de empregados em diferentes dias da semana. O número de empregados necessários em cada dia da semana são: (segunda: 17), (terça: 13), (quarta: 15), (quinta: 19), (sexta: 14), (sábado: 16) e (domingo: 11). Devido a regras impostas pelo sindicato do setor, cada empregado deve trabalhar 5 dias consecutivos e folgar 2 dias consecutivos. Por exemplo, um empregado que trabalha de segunda à sexta deve folgar sábado e domingo. A agência quer satisfazer sua demanda diária e minimizar o número de empregados que a contratar. Proponha uma solução e calcule o número de empregados a serem contratados.

**Problema 1.5.** [Goldberg e Luna,pg 189] - O Problema da auditoria bancária

Fase 1: Um banco deve decidir quantos auditores serão necessários contratar em um horizonte de 6 meses de operação, março a agosto. As necessidades do esforço de auditoria são contabilizadas em termos de mão-de-obra de auditores experientes da seguinte forma:

Mês	Necessidade (Horas/mês)
Março	7000
Abril	8000
Mai	10000
Junho	11000
Julho	7000
Agosto	11000

Cada auditor contratado como funcionário do banco, apesar de formado e aprovado em concurso, tem que ser treinado por um mês antes de poder atuar plenamente em sua função. Nesse treinamento, são utilizados auditores experientes do próprio banco que, deixando de trabalhar na auditoria normal, dedicam 100 horas para cada auditor a ser treinado. Um auditor trabalha 150 horas por mês. Em 1 de fevereiro, o banco dispõe de 60 auditores experientes. O programa de contratação terá início em 1 de março.

Sabe-se também que o mercado de trabalho para auditores está muito instável, de forma que 10% da força de trabalho destes profissionais experientes deixa o banco a cada mês em busca de melhores salários. Um auditor experiente recebe do banco cerca de R\$2000,00 por mês, enquanto o auditor em treinamento só recebe uma ajuda de R\$150,00. Quando o número de auditores excede as necessidades, a carga de trabalho é reduzida, mas não são feitas demissões devido ao elevado custo do processo de acordo na justiça. Quando isto acontece, novos auditores não são contratados e a evasão normal equilibra a força de trabalho.

Proponha uma solução objetivando minimizar os custos de operação do sistema de auditoria.

Fase 2: Utilizando o processo de terceirização

Paralelamente ao sistema de contratação formal para auditores existe a possibilidade de se obter mão-de-obra para auditorias via uma empresa de terceirização: a 3Part Consulting. Essa organização oferece auditores experientes (possivelmente evadidos do sistema normal) e licenciados pela Câmara de Auditores Juramentados. Esse profissional custa R\$ 2500,00 ao mês e pode ser incluído e retirado da folha a qualquer mês sem qualquer custo de admissão ou demissão. A 3Part só exige a garantia mínima de um mês de trabalho para o profissional e que ele não trabalhe em treinamentos, até porque a empresa promove o curso para licenciar auditores juramentados como um serviço adicional. Reformular o problema levando em conta essa nova possibilidade.

**Problema 1.6.** [Goldberg e Luna,pg 253] - O problemas das Damas - Em um tabuleiro de xadrez (8x8) vazio, define-se que a alocação de uma dama em uma casa preta vale o dobro do que em casa branca. Determine a alocação das damas no tabuleiro, de modo que nenhuma delas seja ameaçada pelas demais e obtendo o maior valor possível.

**Problema 1.7.** [Goldberg e Luna,pg 199] - O Problema da Equipe de Competição - Um clube de natação A foi desafiado pelo seu rival, clube B, em uma competição de revezamento quatro estilos em 200m. O clube A tem 100 nadadores treinando no clube. O departamento técnico possui a ficha de cada nadador onde constam os tempos nos estilos Peito(P), Costas(C),Borboleta(B) e Livre(L). (A) O treinador deseja formar a melhor equipe possível dentre os 100 nadadores em treinamento. Encontre uma solução e calcule o tempo total da equipe.

	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
<b>Peito</b>	100.6	83.7	57.3	61.0	47.7	50.7	114.4	35.7	49.5	85.4
<b>Costas</b>	44.0	42.5	119.9	96.9	119.2	41.6	103.8	81.0	77.2	50.7
<b>Borboleta</b>	111.0	75.5	83.2	97.0	77.3	63.5	97.5	81.6	81.6	83.7
<b>Livre</b>	41.3	97.9	80.1	84.3	44.3	82.3	45.6	97.0	81.3	45.8
	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	<b>16</b>	<b>17</b>	<b>18</b>	<b>19</b>	<b>20</b>
<b>Peito</b>	63.7	100.7	105.4	75.3	31.7	99.2	64.3	41.9	31.6	62.1
<b>Costas</b>	49.5	48.4	55.3	45.7	63.7	88.0	107.7	31.5	111.9	84.7
<b>Borboleta</b>	95.6	50.2	114.3	83.0	117.5	39.8	113.7	71.4	74.8	57.8
<b>Livre</b>	82.0	43.7	74.1	100.5	70.4	51.2	84.2	54.8	34.1	119.9

(B) Infelizmente, o clube A, acabou derrotado pelo clube B, O motivo da derrota deu-se pelo fato de que o melhor nadador do clube A no estilo Borboleta distendeu o braço um pouco antes da competição. Como a equipe era de especialistas, os outros nadadores da equipe eram péssimo no estilo borboleta. A melhor troca foi feita, mas, o tempo n nado Borboleta foi muito baixo. O treinador decidiu tomar a seguinte decisão:

- Inscrever 4 equipes evitando acima que problemas físicos atrapalhem a performance do clube nas próximas competições.
- Identificar nadadores que sejam polivalentes.

#### V- Referências

“Operations Research - Deterministic Optimization Models”, Katta Murty, Prentice Hall.

“Practical Management Science”, Wayne Winston, S. Christian Albright e Mark Broadie, Duxbury - Thomson Learning.

“Otimização Combinatória e Programação Linear - Modelos e Algoritmos”, Marco Cesar Goldberg e Henrique Pacca L. Luna, Campus.