Programação Linear
Prof. Moretti

Aula 1 : Problemas de PL :

Problema 1 : Uma companhia produz 2 tipos de fertilizantes: HI-Fosfato e LO-Fosfato. Três matérias primas são utilizadas para manufaturar estes fertilizantes de acordo com a tabela abaixo :

Matéria Prima	HI-Fosfato	Lo-Fosfato	Quantidade Disponível (em Toneladas)
1	2	1	1500
2	1	1	1200
3	1	0	500
Lucro Líquido	R$ 15,00	R$ 10,00	

Os dados nas colunas "HI-Fosfato"e "LO-Fosfato" indicam as toneladas de matéria prima que são necessárias para produzir uma tonelada do respectivo fertilizante. Por exemplo, precisamos de 2 toneladas da matéria prima 1 para produzir 1 tonelada de Hi-Fosfato (veja a célula marcada na tabela). Nós queremos saber quanto produzir dos fertilizantes de tal maneira a maximizar o lucro líquido e respeitar as restrições de disponibilidade das matérias primas.

Resolução do problema 1 :

Sejam :

x_1 = toneladas de Hi - fosfato produzido.

x_2 = toneladas de LO - fosfato produzido.

O nosso objetivo é maximizar o lucro líquido que é dado pela função $z(x) = 15x_1 + 10x_2$ sujeitos às restrições de disponibilidade das matérias primas:

$2x_1 + x_2 \leq 1500$ (restrição de disponibildade da matéria prima 1)

$x_1 + x_2 \leq 1200$ (restrição de disponibilidade da matéria prima 2)

$x_1 \leq 500$ (restrição de disponibilidade da matéria prima 3)

$x_1 \geq 0$ (restrição de não - negatividade de HI - fosfato)

$x_2 \geq 0$ (restrição de não - negatividade de LO - fosfato)

Fim do problema 1

Hipóteses da PL

Ao modelarmos o problema do fertilizante, assumimos implicitamente as seguintes hipóteses:

1. **Proporcionalidade:** Se são necessárias 2 toneladas de matéria prima 1 para produzir 1 tonelada de Hi-fosfato então precisaremos de $2x_1$ para produzir x_1 toneladas de Hi-fosfato. Da mesma forma, se 1 tonelada de Hi-fosfato nos rende R$ 15,00 então x_1 toneladas nos renderá $15x_1$ (não há desconto, nem custo fixo)

2. **Aditividade:** Se necessitamos de 2 toneladas da matéria prima 1 para produzir 1 tonelada de Hi-fosfato e 1 tonelada de matéria prima 2 para produzir 1 tonelada de Lo-fosfato então $2x_1 + x_2$ toneladas da matéria prima 1 são necessárias para se produzir x_1 toneladas de Hi-fosfato e x_2 toneladas de Lo-fosfato.

3. **Não-Integralidade da solução:** As variáveis do modelo podem assumir qualquer valor real no seu intervalo de variação

4. **Determinística**: Os parâmetros do problema são conhecidos com certeza, isto é, não são probabilísticos.

Problema 2: Uma refinaria compra 4 tipos de gasolina, mistura-os e produz 3 tipos de combustíveis. A tabela abaixo define as octanagens, disponibilidades e preço das gasolinas usadas.

Gasolina	Octanagem	Barris disponíveis por dia	Preço do barril (em Reais)
1	68	4000	31
2	86	5050	33
3	91	7100	36
4	99	4300	39

Já a próxima tabela descreve as octanagens mínimas, preços de venda e demandas de cada combustível produzido pela refinaria.

Combustível	Octanagem Mínima	Preço de Venda	Demanda
1	95	45	No máximo 10.000 por dia
2	90	43	Qualquer quantia
3	85	41	No mínimo 15.000 por dia

A companhia vende cada barril de gasolina **não usada** nos combustíveis a R$ 39,00 se a octanagem é mais de 90 e R$ 37,00 se a octanagem é menor que 90. Escreva o problema de se maximizar o lucro líquido diário como um problema de programação linear.

Resolução do problema 2:

Sejam

x_{ij} = barris diários da gasolina i usada para fazer o combustível do tipo j.

y_i = barris diários de gasolina do tipo i (NÃO usada) vendida no mercado.

Portanto, o nosso modelo se torna:

$$\begin{aligned}\text{Maximizar } z = {} & 45(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}) + 43(x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}) + 41(x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43}) + \\ & y1(37 - 31) + y2(37 - 33) + y3(39 - 36) + y4(39 - 39) - 31(x_{11} + x_{12} + x_{13}) - \\ & 33(x_{21} + x_{22} + x_{23}) - 36(x_{31} + x_{32} + x_{33}) - 39(x_{41} + x_{42} + x_{43})\end{aligned}$$

sujeito a

- Restrições de Octanagem para os combustíveis :

$$\frac{68x_{11} + 86x_{21} + 91x_{31} + 99x_{41}}{(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41})} \geq 95$$

$$\frac{68x_{12} + 86x_{22} + 91x_{31} + 99x_{41}}{(x_{12} + x_{22} + x_{31} + x_{41})} \geq 90$$

$$\frac{68x_{13} + 86x_{23} + 91x_{33} + 99x_{43}}{(x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43})} \geq 85$$

- Restrições de disponibilidade das gasolinas :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 = 4000$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 = 5050$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 = 7100$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + y_4 = 4300$$

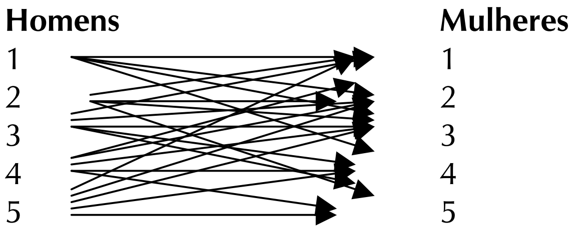
- Restrições de demanda dos combustíveis :

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 10.000$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \geq 15.000$$

- Restrições de não - negatividade :

$x_{ij}, y_i \geq 0$ para todo i e j.

Problema 3: O problema descrito abaixo é conhecido com "O problema do casamento". Temos um grafo bipartido onde cada nó da direita está ligado apenas com o conjunto de nós da esquerda.



A tabela abaixo contém as taxas de felicidade entre os vários casais por unidade de tempo.

	Mulheres				
Homens	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	78	-16	19	25	83
2	99	98	87	16	92
3	86	19	39	88	17
4	-20	99	88	79	65
5	67	98	90	48	60

Seja

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o homem } i \text{ está designado à mulher } j \\ 0 & \text{se o homem } i \text{ não es'tá designado à mulher } j \end{cases}.$$

-Alocar cada homem a uma única mulher:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1$$
$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1$$

-Alocar cada mulher a apenas um único homem:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1$$