

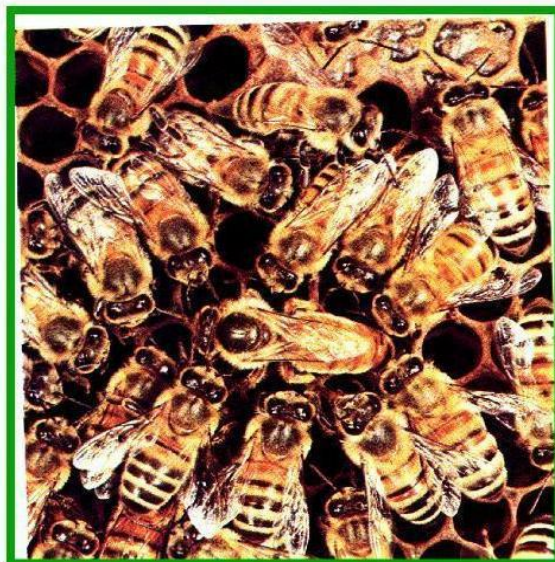
Bio Matemática

XII

IMECC – UNICAMP
XXV CNMAC



2002
Nova Friburgo



Rodney C. Bassanezi (Coordenador)

Hyun M. Yang

Wilson C. Ferreira Jr

João F. C. A. Meyer

Laécio C. Barros

Laércio L. Vendite

Sílvio D. A. Pregnolato

Geraldo L. Diniz (Editoração)

Prefácio

Em época de dólar inflacionado e escasseamento de árvores, a publicação de qualquer coisa em papel é uma temeridade e uma grande responsabilidade, mais ainda tratando-se de um grupo de indivíduos onde vários deles são comuns aos grupos dos duríssimos de caixa e dos radicais da preservação ambiental.

Com este preâmbulo o leitor que chegou até este prefácio pelo menos pode se certificar de que não foi pouco o esforço despendido nem menor a dor de consciência na confecção de várias das páginas que se encontram pela frente. É claro que somente esforço e boas intenções não são suficientes para garantir a qualidade de literatura, seja ela qual for, mas são, sem dúvida, quesitos necessários; *“aquilo que foi escrito sem esforço será lido com desgosto”*, já dizia Samuel Johnson.

Mas há ainda um segundo ingrediente extra a ser considerado. Esta é a **XII** Revista de Biomatemática e, portanto, não será presunçoso dizer que ela traz uma grande experiência acumulada. O Grupo de BioMatemática do IMECC-UNICAMP, que é pioneiro na área no Brasil, iniciou a sua atuação efetiva há aproximadamente quinze anos. Observando-se que o tempo de gestação de pessoal nesta área é muito menor do que de seus laranjas biológicos, é possível que já tenhamos hoje três gerações de biomatemáticos espalhados pelo Brasil e América Latina. Por outro lado, em semelhança aos espécimes biológicos, as gerações que se sucedem, uma vez que disponham de nutrientes em maior e melhor qualidade, e façam uso deles, têm a oportunidade de se aperfeiçoarem progressivamente. Essa e as outras Revistas têm a pretensão de contribuir para a disseminação mútua e aumento de nutrientes adequados.

Entretanto, sabemos também que o aumento populacional de biomatemáticos depende da geração de novos indivíduos o que neste caso específico só poderá acontecer por processo de adoção, ou melhor, por sedução. Neste aspecto a Biomatemática tem sido menos convincente do que se poderia esperar de uma área tão fascinante. Várias razões são aparentes e outras

misteriosas. Dentre as primeiras, a mais notável é sem dúvida a militante resistência cultural, burocrática e intestinal que a universidade brasileira apresenta contra atividades interdisciplinares. E, no caso específico da Biomatemática, esta resistência se encontra em suas duas margens. Isto talvez surpreenda um observador superficial que forme sua opinião pela medida do tanto que falam sem verificar o que fazem. Muito daquilo que é normalmente propagandeado como sendo resultado de colaboração interdisciplinar não passa de um mero jogo de palavras ou de compra e uso de “caixas-pretas”.

Na contra-mão dessa tendência, a Revista de Biomatemática é também um esforço ativo da margem de cá, a matemática, em lançar as bases de uma ponte interdisciplinar que possa oferecer a possibilidade de um trânsito denso nas duas direções.

Enfim, espero que o(a) leitor(a) tenha uma agradável travessia pelo caldo nutritivo, que morda uma isca e que em futuras edições venha se responsabilizar com a derrubada de mais algumas árvores.

Terminando, falemos de dinheiro. O mesmo Johnson, acima citado, disse também que *“apenas um cabeça de bagre teria a capacidade de pensar em escrever um livro sem pensar no dinheiro”*. Portanto, estamos bem justificados em cobrar-lhe alguma coisa por essa Revista.

Se, todavia, você não apreciar o conteúdo do presente volume, devo lhe avisar que o seu “dólar” não voltará e sugiro que, pelo menos, remeta o seu exemplar para o reciclável, dando-lhe assim a oportunidade de ressurgir em um próximo número sem dor de consciência ecológica.

Wilson C. Ferreira Jr.

Índice

Uma estratégia para a simulação numérica do comportamento evolutivo de um sistema de EDP descritivo do mal-das-cadeiras de capivaras – taxa periódica de infecção - João Frederico C. A. Meyer e Silvio A. Pregnotatto	01
Uma estratégia numérica para a simulação numérica do comportamento evolutivo de um sistema de EDP descritivo do mal-das-cadeiras de capivaras – a presença do vetor - João Frederico C. A. Meyer e Silvio A. Pregnotatto	19
Fuzzy rules in asymptomatic HIV virus infected individuals model - Rosana Sueli da Motta Jafelice, Laécio Carvalho de Barros, Rodney Carlos Bassanezi e Fernando Gomide	39
Modelos Epidemiológicos com Inclusão diferencial fuzzy – Laécio C. Barros; Rodney C. Bassanezi; Maria Beatriz F. Leite e Renata Zotin G. de Oliveira	51
Dinâmica da transmissão da dengue e delineamento de mecanismos de controle e prevenção - Hyun Mo Yang	63
Dinâmica de populações via inclusões diferenciais fuzzy – Yurilev Chalco-Cano: Marko A. Rojas-Medar; Marina T. Mizukoshi e Rodney C. Bassanezi	91
Um modelo para dispersão de poluentes em áreas alagáveis – Geraldo L. Diniz; Jurandir F. R. Fernandes e João Frederico C. A. Meyer	105
Dispersão de Plantas Anuais com Bancos de Sementes: Um modelo discreto com operadores integrais e retardamento – Diomar C. Mistro; Luiz A. D. Rodrigues e A. B. Shmid	131
Refúgios espaciais em interações presa-predador – Luiz A. D. Rodrigues; Diomar C. Mistro e A. L. Auth	141
Uma Caricatura de Serra para a Equação de Ludwig – Lucy Tiemi Takahashi e Wilson Castro Ferreira Jr	149
Estudo matemático da propagação de uma doença de transmissão indireta – Norberto Aníbal Maidana e Wilson Castro Ferreira Jr	157

Uma estratégia para a simulação numérica do comportamento evolutivo de um sistema de EDP descritivo do mal-das-cadeiras de capivaras – taxa periódica de infecção

João Frederico da C. A. Meyer, joni@ime.unicamp.br
Sílvia de Alencastro Pregnotatto, silvio@ime.unicamp.br
DMA/IMECC – UNICAMP, CP 6065, cep 13083-970, Campinas, SP

O Problema

Neste trabalho, o objetivo é o de recorrer a instrumental numérico em sistemas do tipo SIR ou SIRS com difusão espacial a que iremos acrescentar determinadas hipóteses relacionadas a um estudo de caso. Neste exemplo, iremos tentar descrever algumas das hipóteses relacionadas à avaliação do mal-das-cadeiras em populações de capivaras, uma epidemia com espalhamento espacial cíclico em determinadas situações com tal tipo de roedor em ambientes naturais. A idéia, então, seria a de colocar um modelo SIR ou SIM, porém apenas com equações para Suscetíveis e Infectados, já que os removidos o são por morte (o que explica a sigla: SIM), simulando o comportamento evolutivo da epidemia citada. Este modelo incluiria a dispersão espacial das capivaras infectadas, o contágio das suscetíveis, e uma dinâmica populacional das suscetíveis, já que as infectadas praticamente não se reproduzem como tal. Além disto, como a população inicial de capivaras suscetíveis é homogênea, nada ocorre em termos de difusibilidade numa fase inicial, mas a variação espacial e temporal surge quando, por contágio, parte da população de animais suscetíveis passa a infectados e estes, após algum tempo, a mortos (ou removidos). O primeiro modelo não irá incluir insetos transmissores do *trypanopssoma equus* causador desse mal endêmico.

O Modelo Matemático

Este primeiro modelo é dado, conseqüentemente, por:

$$\begin{aligned}
 S &= S(x, y; t), \quad I = I(x, y; t) \quad \text{e} \quad M = M(x, y; t) \quad \text{tais que} \\
 \frac{\partial S}{\partial t} - \alpha_s \Delta S + \operatorname{div}(\vec{V} \cdot S) + \sigma_s S &= \lambda S \left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \beta SI, \\
 \frac{\partial I}{\partial t} - \alpha_i \Delta I + \sigma_i I &= +\beta SI - \gamma I \quad \text{e} \\
 \frac{\partial M}{\partial t} &= \gamma I \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad t \in (0, T].
 \end{aligned} \tag{1}$$

Uma condição inicial possível é dada por $S(x, y; 0) = S_0$, constante em todo o domínio, por $M(x, y; 0) = 0$ e por $I(x, y; 0) = I_0(x, y)$, onde se supõe uma população de animais sadios, e suscetíveis, homogeneamente distribuída pelo domínio do estudo, e uma população de infectados concentrada em alguma sub-região do domínio Ω . As condições de contorno são – numa modelagem exploratória, inicial - de tipo Dirichlet e von Neumann homogêneas, indicando partes de fronteira $\partial\Omega$ em que há um obstáculo à passagem de indivíduos da espécie estudada (Γ_1) e onde não há indivíduos (Γ_0):

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial S(x, y; t)}{\partial \eta} \right|_{(x, y) \in \Gamma_1} &= 0 \quad \text{para } t \in (0, T] \quad \text{e} \\
 S(x, y; t)|_{(x, y) \in \Gamma_0} &= 0 \quad \text{para } t \in (0, T], \quad \text{além de} \\
 \left. \frac{\partial I(x, y; t)}{\partial \eta} \right|_{(x, y) \in \Gamma_1} &= 0 \quad \text{para } t \in (0, T] \quad \text{e} \\
 I(x, y; t)|_{(x, y) \in \Gamma_0} &= 0 \quad \text{para } t \in (0, T].
 \end{aligned} \tag{2}$$

Os parâmetros que figuram em (1) indicam, como é usual:

- α_s e α_i são, respectivamente, os parâmetros de dispersão populacional de Suscetíveis e de Infectados;

- σ_S e σ_I são, por sua vez, parâmetros indicativos da hostilidade do meio, para Suscetíveis e Infectados, respectivamente;
- V indica (se necessário) uma direção preferencial de movimento de indivíduos suscetíveis, com $\text{div}(V) = 0$;
- λ fornece a taxa intrínseca de reprodução (considerada aqui para um modelo de dinâmica logística) de elementos Suscetíveis da espécie;
- K é a capacidade de suporte do meio;
- β dá a taxa de infecção; e
- γ é a taxa de falecimento de indivíduos infectados.

Uma das razões que motiva o uso experimental deste modelo consiste no fato se obter um falso estado estacionário, dado por:

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \frac{\sigma_I + \gamma}{\beta} \\ \bar{I} &= \frac{\beta \cdot K \cdot (\sigma_S - \lambda) - \lambda \cdot (\sigma_I + \gamma)}{\beta \cdot (\lambda - \beta \cdot K)}\end{aligned}\tag{3}$$

Este par de valores, ainda que permaneça (pelo menos teoricamente) estável em termos das respectivas populações de animais suscetíveis e infectados, irá corresponder a uma variação linear no tempo para a população de indivíduos mortos, contrabalançando o crescimento da população pela reprodução dos sadios. Evidentemente esta terna dada por $(\bar{S}, \bar{I}, M(t))$ depende de serem também constantes todos os parâmetros envolvidos. Do ponto de vista da população efetivamente afetada, isto pareceria apontar para um equilíbrio populacional possível com a coexistência de animais sadios e infectados. As condições de variabilidade, porém, tanto nas características das espécies, quanto em fatores que fazem variar coeficientes de contágio e de infecção, bem como de remoção, descartam essa convivência estática da doença no meio de uma população.

Isto posto, iremos recorrer a métodos de aproximação para descrever soluções do sistema (6) acima, incorporando características qualitativas com as quais se possa analisar o mal-das-cadeiras que pretendemos avaliar em uma população endêmica. Desse modo, iremos aproximar taxa de infecção – que descreve o contágio – por uma senoidal, que deve retratar (numa primeira aproximação) a variação periódica sazonal da população do inseto transmissor. Serão aqui consideradas apenas as moscas varejeiras ou “tábanos” já que o presente modelo não irá incluir os barbeiros ou “vinchucas” que, embora transmissores, não se manifestam significativamente no meio estudado. Assim, associando a ação do transmissor à sua densidade populacional, sua disponibilidade, teremos de (6), substituindo a taxa de infecção constante β pela expressão $\beta + \delta \cdot \sin(\pi \cdot t/6)$:

$$\begin{aligned}
 &S = S(x, y; t), \quad I = I(x, y; t) \quad \text{e} \quad M = M(x, y; t) \quad \text{tais que} \\
 &\frac{\partial S}{\partial t} - \alpha_s \Delta S + \operatorname{div}(\vec{V} \cdot S) + \sigma_s S = \lambda S \left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)\right) S \cdot I, \\
 &\frac{\partial I}{\partial t} - \alpha_i \Delta I + \sigma_i I = + \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)\right) S \cdot I - \gamma I, \\
 &\frac{\partial M}{\partial t} = \gamma I, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ e } t \in (0, T].
 \end{aligned} \tag{4}$$

com $S(x, y, 0) = S_0 = \text{constante}$, $M(x, y, 0) = 0$ e $I(x, y, 0) = I_0(x, y)$, além de satisfazer a (2). A unidade temporal aqui usada é o mês (o que justifica o termo oscilatório anual $\pi \cdot t/6$ em (4)).

Abrimos mão, evidentemente da exibição de uma expressão simples para a solução analítica, e dedicamo-nos, aqui, à busca e ao manejo exploratório de soluções aproximadas. O objetivo, muito mais do que defender que tais soluções retratariam realidades possíveis, é o de criar uma cultura de modelos para que, à medida que novas características de cenários reais e efetivos sejam incorporadas ao modelo, uma intuição

adquirida auxilie na consideração avaliativa das soluções aproximadas, permitindo uma crítica efetiva do uso do modelo e de seus resultados.

Nessas condições, passaremos à formulação variacional do sistema acima descrito, escolhendo antes espaços funcionais convenientes para esta linha de trabalho:

$$\begin{aligned} H &= \{ u : \forall t \in (0, T], u \in H^1(\Omega), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\Omega) \text{ e } u|_{\Gamma_0} = 0 \} \\ V &= \{ v : v \in H^1(\Omega) \text{ e } v|_{\Gamma_0} = 0 \}. \end{aligned} \quad (5)$$

O que se obtém é, então:

$S = S(x, y; t)$, $I = I(x, y; t)$ e $M = M(x, y; t)$ em H tais que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial S}{\partial t} | v \right) - \alpha_s (\Delta S | v) + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla} S | v) + \sigma_s (S | v) = \\ & = \lambda (S | v) - \frac{\lambda}{K} (S^2 | v) - \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \cdot (S \cdot I | v), \\ & \left(\frac{\partial I}{\partial t} | v \right) - \alpha_i (\Delta I | v) + \sigma_i (I | v) = +\beta (S \cdot I | v) - \gamma (I | v), \\ & \left(\frac{\partial M}{\partial t} | v \right) = \gamma (I | v), \quad \text{para } \forall v \in V. \end{aligned}$$

Ora, para $\forall t \in (0, T]$, este sistema, com o uso do Teorema de Green e a incorporação das condições de contorno de Dirichlet e de Von Neumann homogêneas, leva a:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial S}{\partial t} | v \right) + \alpha_s (\nabla S \parallel \nabla v) + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla} S | v) + \sigma_s (S | v) = \\ & = \lambda (S | v) - \frac{\lambda}{K} (S^2 | v) - \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \cdot (S \cdot I | v), \\ & \left(\frac{\partial I}{\partial t} | v \right) - \alpha_i (\nabla I \parallel \nabla v) + \sigma_i (I | v) = + \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) \right) \cdot (S \cdot I | v) - \gamma (I | v), \\ & \left(\frac{\partial M}{\partial t} | v \right) = \gamma (I | v), \quad \text{para } \forall v \in V. \end{aligned} \quad (6)$$

Há, ainda, que se exigir das funções procuradas S , I e M que satisfaçam as condições iniciais, $S(x, y, 0) = S_0 = \text{constante}$, $I(x, y, 0) = I_0(x, y)$, e $M(x, y; 0) = 0$.

Discretização

Deste modo, obtivemos a formulação fraca, ou variacional, do problema originalmente proposto, formulação apropriada para a discretização via Método de Galerkin, com Elementos Finitos. Além disto iremos recorrer a Crank-Nicolson na discretização da variável temporal. Para isto, na prática, é necessário promover uma separação de variáveis: tratamentos diferenciados para a variável tempo e para as espaciais. O espaço de Hilbert H será aproximado por subespaços V_h cujos elementos são da forma

$$v = \sum_{j=1}^N c_j(t) \cdot \varphi_j(x, y).$$

As funções $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_N$ geram um subespaço V_h do espaço V de funções teste.

As soluções de (6) S , I e M serão aproximadas por expressões do tipo:

$$\begin{aligned} S_h &= \sum_{j=1}^N p_j(t) \cdot \varphi_j(x, y) \\ I_h &= \sum_{j=1}^N q_j(t) \cdot \varphi_j(x, y) \\ M_h &= \sum_{j=1}^N r_j(t) \cdot \varphi_j(x, y) \end{aligned} \tag{7}$$

o que, em (6), leva ao sistema não-linear de Equações Diferenciais Ordinárias:

$$\begin{aligned}
& \sum_j \frac{dp_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_s \sum_j p_j(t) (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \sum_j p_j(t) (\vec{V} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \sigma_s \sum_j p_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) = \\
& = \lambda \sum_j p_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\lambda}{K} \sum_j p_j(t) \sum_k p_k(t) \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \left(\bar{\beta} + \delta \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \cdot \sum_j p_j(t) \sum_k q_k(t) \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i), \tag{8} \\
& \sum_j \frac{dq_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_l \sum_j q_j(t) (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \sigma_l \sum_j q_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) = \\
& = + \left(\bar{\beta} + \delta \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) \right) \cdot \sum_j p_j(t) \sum_k q_k(t) \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) - \gamma \sum_j q_j(t) (\varphi_j | \varphi_i), \\
& \sum_j \frac{dr_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) = + \gamma \sum_j q_j(t) (\varphi_j | \varphi_i), \text{ para } \forall \varphi_i \in \text{base de } V_h.
\end{aligned}$$

O passo seguinte é o de se substituírem os termos de variação temporal, usando o método implícito de Crank-Nicolson:

$$\begin{aligned}
\frac{dc_j(t_n + \Delta t/2)}{dt} &\cong \frac{c_j(t_{n+1}) - c_j(t_n)}{\Delta t} \text{ com erro da ordem de } (\Delta t)^2 \text{ e} \\
c_j(t_n + \Delta t/2) &\cong \frac{c_j(t_{n+1}) + c_j(t_n)}{2} \text{ com erro da mesma ordem.}
\end{aligned} \tag{9}$$

Denominando $p_j^{(n)}$, $q_j^{(n)}$ e $r_j^{(n)}$ as aproximações de p , q e de r nos nós (x_j, y_j, t_n) , pode-se usar (9) e voltar a (8) para obter uma nova aproximação do sistema dado aí:

$$\begin{aligned}
& \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} - p_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_s \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j || \nabla \varphi_i) + \\
& + \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\vec{V} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \sigma_s \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) = \\
& = \lambda \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \frac{\lambda}{K} \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} . (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \cdot \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} . (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i), \\
& \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} - q_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_t \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j || \nabla \varphi_i) + \\
& + \sigma_t \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) = \\
& = + \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6} + \frac{1}{2}\right) \right) \cdot \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} . (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \gamma \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i), \\
& \sum_j \frac{r_j^{(n+1)} - r_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) = + \gamma \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} (\varphi_k | \varphi_i), \\
& \text{para } \forall \varphi_i \in \text{base de } V_h.
\end{aligned} \tag{10}$$

As condições iniciais também têm que ser discretizadas:

$$S_j^{(0)} = S_0(x_j, y_j) = S_0, \quad I_j^{(0)} = I_0(x_j, y_j) \quad \text{e} \quad M_j^{(0)} = 0, \quad j = 1, \dots, N. \tag{11}$$

Nesta expressão, separando os termos em t_{n+1} e em t_n , obtêm-se:

$$\begin{aligned}
& \sum_j p_j^{(n+1)}(\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_s \Delta t}{2} \sum_j p_j^{(n+1)}(\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) + \\
& + \frac{\Delta t}{2} \sum_j p_j^{(n+1)}(\vec{V} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\sigma_s \Delta t}{2} \sum_j p_j^{(n+1)}(\varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \frac{\lambda \Delta t}{2} \sum_j p_j^{(n+1)}(\varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\lambda \Delta t}{2K} \sum_j p_j^{(n+1)} \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \cdot \sum_j p_j^{(n+1)} \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i) = \\
& = \sum_j p_j^{(n)}(\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_s \Delta t}{2} \sum_j p_j^{(n)}(\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) - \\
& - \frac{\Delta t}{2} \sum_j p_j^{(n)}(\vec{V} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\sigma_s \Delta t}{2} \sum_j p_j^{(n)}(\varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\lambda \Delta t}{2} \sum_j p_j^{(n)}(\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\lambda \Delta t}{2K} \sum_j p_j^{(n)} \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \cdot \sum_j p_j^{(n)} \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i), \\
& \sum_j q_j^{(n+1)}(\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_i \Delta t}{2} \sum_j q_j^{(n+1)}(\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) + \frac{\sigma_i \Delta t}{2} \sum_j q_j^{(n+1)}(\varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) \right) \cdot \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \sum_j q_j^{(n+1)} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\gamma \Delta t}{2} \sum_j q_j^{(n+1)}(\varphi_j | \varphi_i) = \\
& = \sum_j q_j^{(n)}(\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_i \Delta t}{2} \sum_j q_j^{(n)}(\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) - \frac{\sigma_i \Delta t}{2} \sum_j q_j^{(n)}(\varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) \right) \cdot \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \sum_j q_j^{(n)} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \frac{\gamma \Delta t}{2} \sum_j q_j^{(n)}(\varphi_j | \varphi_i), \\
& \sum_j r_j^{(n+1)}(\varphi_j | \varphi_i) = \sum_j r_j^{(n)}(\varphi_j | \varphi_i) + \gamma \Delta t \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2}(\varphi_j | \varphi_i), \\
& \text{para } \forall \varphi_i \in \text{base de } V_h.
\end{aligned} \tag{12}$$

Reagrupando convenientemente os termos de (12), visando facilitar uma expressão que conduza de modo mais natural às manipulações algorítmicas, obtem-se:

$$\begin{aligned}
& \sum_j p_j^{(n+1)} \left\{ \left[1 + \frac{\sigma_s \Delta t}{2} - \frac{\lambda \Delta t}{2} \right] \cdot (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_s \Delta t}{2} \cdot (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \right. \\
& + \frac{\Delta t}{2} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\lambda \Delta t}{2K} \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \sin\left(-\frac{\pi t}{6} \frac{n+\frac{1}{2}}{2}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \Big\} = \\
& = \sum_j p_j^{(n)} \left\{ \left[1 - \frac{\sigma_s \Delta t}{2} + \frac{\lambda \Delta t}{2} \right] \cdot (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_s \Delta t}{2} \cdot (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \right. \\
& - \frac{\Delta t}{2} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\lambda \Delta t}{2K} \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \sin\left(-\frac{\pi t}{6} \frac{n+\frac{1}{2}}{2}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \Big\}, \\
& \sum_j q_j^{(n+1)} \left\{ \left[1 + \frac{\sigma_l \Delta t}{2} + \frac{\gamma \Delta t}{2} \right] \cdot (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_l \Delta t}{2} \cdot (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \right. \\
& - \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \sin\left(-\frac{\pi t}{6} \frac{n+\frac{1}{2}}{2}\right) \right) \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \Big\} = \\
& = \sum_j q_j^{(n)} \left\{ \left[1 - \frac{\sigma_l \Delta t}{2} - \frac{\gamma \Delta t}{2} \right] \cdot (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_l \Delta t}{2} \cdot (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \right. \\
& + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \sin\left(-\frac{\pi t}{6} \frac{n+\frac{1}{2}}{2}\right) \right) \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \Big\} \tag{12'} \\
& \sum_j r_j^{(n+1)} (\varphi_j | \varphi_i) = \sum_j r_j^{(n)} (\varphi_j | \varphi_i) + \gamma \Delta t \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i), \\
& \text{para } \forall \varphi_i \in \text{base de } V_h.
\end{aligned}$$

Algoritmo

Este sistema pode ser expresso de modo bastante resumido (visando a explicitação do procedimento algorítmico de aproximação) como:

$U_S(S^{(n)}, S^{(n+1)}, I^{(n)}, I^{(n+1)}) \cdot S^{(n+1)} = W_S(S^{(n)}, S^{(n+1)}, I^{(n)}, I^{(n+1)}) \cdot S^{(n)}$,
 $U_I(S^{(n)}, S^{(n+1)}, I^{(n)}, I^{(n+1)}) \cdot I^{(n+1)} = W_I(S^{(n)}, S^{(n+1)}, I^{(n)}, I^{(n+1)}) \cdot I^{(n)}$, e
 $U_M \cdot M^{(n+1)} = W_M \cdot M^{(n)} + w(I^{(n)}, I^{(n+1)})$, onde os operadores não lineares U_S , W_S , U_I , W_I e as matrizes U_M e W_M , além do vetor $w(I^{(n+1)}, I^{(n)})$, são dados, respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 U_S(i, j) &= [1 + \frac{\sigma_S \Delta t}{2} - \frac{\lambda \Delta t}{2}] \cdot (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_S \Delta t}{2} \cdot (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \\
 &+ \frac{\Delta t}{2} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\lambda \Delta t}{2K} \cdot \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i) + \\
 &+ \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t_{n+\frac{1}{2}}}{6}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \cdot \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i), \\
 W_S(i, j) &= [1 - \frac{\sigma_S \Delta t}{2} + \frac{\lambda \Delta t}{2}] \cdot (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_S \Delta t}{2} \cdot (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \\
 &- \frac{\Delta t}{2} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\lambda \Delta t}{2K} \cdot \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i) - \\
 &- \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t_{n+\frac{1}{2}}}{6}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \cdot \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i), \\
 U_I(i, j) &= [1 + \frac{\sigma_I \Delta t}{2} + \frac{\gamma \Delta t}{2}] \cdot (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_I \Delta t}{2} \cdot (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \\
 &- \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t_{n+\frac{1}{2}}}{6}\right) \right) \cdot \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i), \\
 W_I(i, j) &= [1 - \frac{\sigma_I \Delta t}{2} - \frac{\gamma \Delta t}{2}] \cdot (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_I \Delta t}{2} \cdot (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \\
 &+ \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t_{n+\frac{1}{2}}}{6}\right) \right) \cdot \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i), \\
 U_M(i, j) &= W_M(i, j) = (\varphi_j | \varphi_i) \text{ e, ainda, o vetor } w \text{ sendo dado por} \\
 w(i) &= \gamma \Delta t \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i), \text{ para } \forall \varphi_i \in \text{base de } V_h.
 \end{aligned} \tag{13}$$

A obtenção dos valores de $S^{(n+1)}$, $I^{(n+1)}$ e $M^{(n+1)}$ será por meio do seguinte esquema identificado como (14) e expresso tanto de modo didático quanto algorítmico:

A partir de $S^{(0)}$, $I^{(0)}$ e $M^{(0)}$

1. Obter $S^{(*)}$ da equação linear

$$U_S(S^{(0)}, S^{(*)}, I^{(0)}, I^{(0)}) \cdot S^{(*)} = W_S(S^{(0)}, S^{(*)}, I^{(0)}, I^{(0)}) \cdot S^{(0)};$$

2. Obter $I^{(*)}$ da equação linear

$$U_I(S^{(0)}, S^{(*)}, I^{(0)}, I^{(*)}) \cdot I^{(*)} = W_I(S^{(0)}, S^{(*)}, I^{(0)}, I^{(*)}) \cdot I^{(0)}; \quad (14)$$

3. Obter $M^{(*)}$ da equação linear

$$U_M \cdot M^{(*)} = W_M \cdot M^{(0)} + w(I^{(0)}, I^{(*)});$$

4. Obter $S^{(**)}$ da equação linear

$$U_S(S^{(0)}, S^{(*)}, I^{(0)}, I^{(*)}) \cdot S^{(**)} = W_S(S^{(0)}, S^{(*)}, I^{(0)}, I^{(*)}) \cdot S^{(0)};$$

5. Obter $I^{(**)}$ da equação linear

$$U_I(S^{(0)}, S^{(*)}, I^{(0)}, I^{(*)}) \cdot I^{(**)} = W_I(S^{(0)}, S^{(*)}, I^{(0)}, I^{(*)}) \cdot I^{(0)};$$

6. Obter $M^{(**)}$ da equação linear

$$U_M \cdot M^{(**)} = W_M \cdot M^{(0)} + w(I^{(0)}, I^{(**)});$$

7. De modo análogo, obter $S^{(***)}$, $I^{(***)}$ e $M^{(***)}$;

8. Depois de um número relativamente pequeno de iterações deste tipo, fazer

$$S^{(1)} = S^{(**...*)}, I^{(1)} = I^{(**...*)} \text{ e } M^{(1)} = M^{(**...*)};$$

9. Este procedimento triplo é repetido para cada passo no tempo para se obter:

$$U_S(S^{(n)}, S^{(**...*)}, I^{(n)}, I^{(**...*)}) \cdot S^{(**...*)} = W_S(S^{(n)}, S^{(**...*)}, I^{(n)}, I^{(**...*)}) \cdot S^{(n)},$$

$$U_I(S^{(n)}, S^{(**...*)}, I^{(n)}, I^{(**...*)}) \cdot I^{(**...*)} = W_I(S^{(n)}, S^{(**...*)}, I^{(n)}, I^{(**...*)}) \cdot I^{(n)}, \text{ e}$$

$$U_M \cdot M^{(**...*)} = W_M \cdot M^{(n)} + w(I^{(n)}, I^{(**...*)});$$

10. Fazer $S^{(n+1)} = S^{(**...*)}$, $I^{(n+1)} = I^{(**...*)}$ e $M^{(n+1)} = M^{(**...*)}$.

Simulações

Este algoritmo do modo como é aqui apresentado, repete em diversas dimensões um trabalho anterior, para uma única equação, de Peaceman e Rachford, onde além da sugestão para contornar iterativamente a não-linearidade do sistema, temos resultados de convergência.

Este programa foi rodado no aplicativo Matlab visando, por um lado, utilizar os recursos de matrizes esparsas, e, por outro, os de visualização (principalmente *plot*, *surf* e *contour*). Embora os ensaios iniciais tenham demorado razoavelmente, execuções mais recentes têm se revelado animadoramente rápidas.

Nas figuras abaixo, temos de início (fig. 1), as curvas de nível dos três compartimentos após 300 passos no tempo, mais a condição inicial da população de infectados. Neste domínio idealizado, podemos ver a simulação de uma situação possível: uma “invasão” no domínio de animais suscetíveis por um pequeno grupo de capivaras infectadas (presentes no canto superior direito – e só.). Nas imagens, podemos ver, ressalvadas as diferenças de concentração, a presença complementar de infectados e de suscetíveis, com a presença de morte “seguindo” a população de animais doentes.

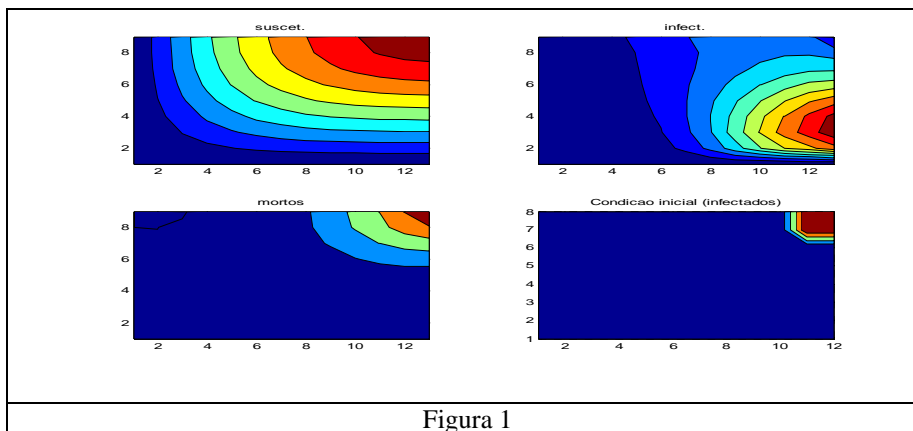


Figura 1

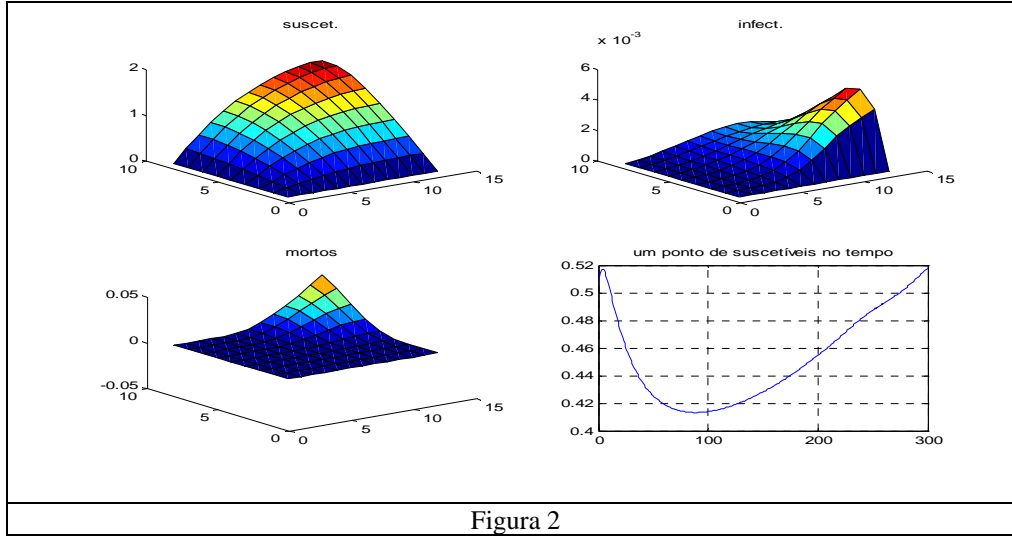


Figura 2

Na fig. 2, o quarto gráfico ilustra a evolução de um ponto no interior do domínio, e pode ser observada a mortalidade devida à doença, mais uma recuperação populacional seguindo uma curva que, a um tempo, sugere a periodicidade senoidal acoplada a uma evolução de tipo logístico. Este comportamento na simulação numérica do modelo é condizente com as informações locais, que dão conta de uma larga mortalidade seguida de uma lenta e segura recuperação populacional.

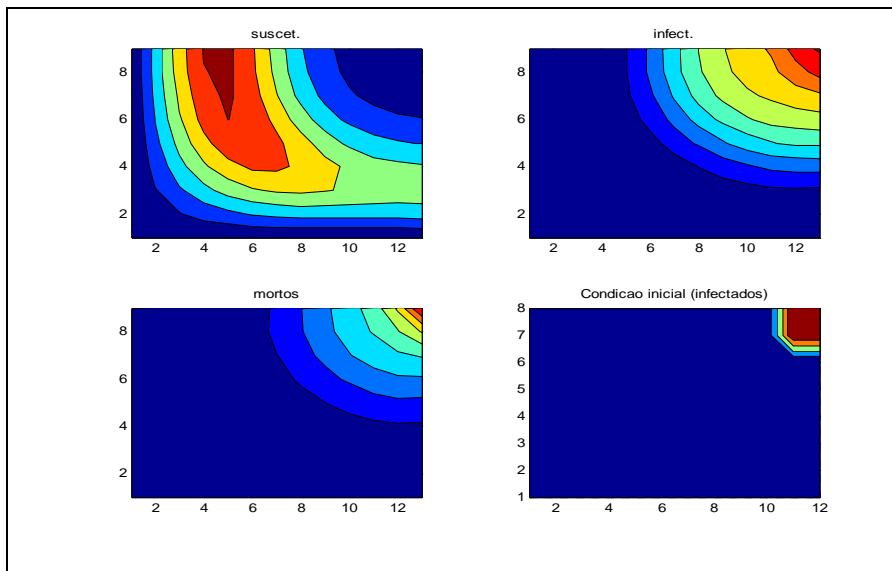


Figura 3

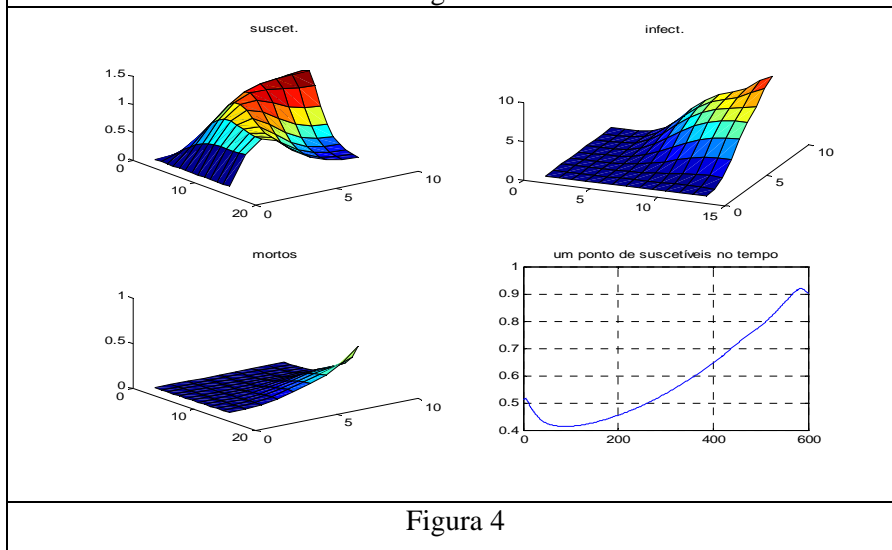


Figura 4

Nestas figuras (3. e 4.) temos a mesma situação, porém como o tempo final foi aumentado, com um conseqüente aumento no número de passos no tempo, temos os

efeitos realçados. Assim, podemos ver, novamente, o comportamento que chamaremos aqui de complementar, no sentido de populações de compartimentos diferentes (S e I) ocuparem espaços disjuntos. Além disso, no gráfico inferior, à direita, podemos acompanhar, de novo, a característica periódica acoplada ao crescimento populacional de animais suscetíveis, uma vez vencida a queda de concentração devida à endemia.

Conclusão

Ainda que sejam válidas muitas das críticas feitas a modelos deste tipo, restritas a uma só espécie, simulações deste tipo têm provado ser bastante úteis na confirmação de hipóteses, na verificação de valores para parâmetros de difícil obtenção e bb

Referências

- Banks, H.T. e Kareiva, P. Parameter Estimation Techniques for Transport Equations with Application to Population Dispersal and Tissue Bulk Flow Models. *J. Math. Biol.*, 17, 253-273, 1983.
- Bassanezi, R.C. e Ferreira Jr., W.C. *Equações Diferenciais e Aplicações*, HARBRA, 1988.
- Boch, J. e Supperer, R. *Parasitologia em medicina veterinária*. Ed. Hemisfério Sur S.A., Buenos Aires, 627 pp., 1992.
- Boero, J.J. *Parasitosis animalis*. Ed. Universitaria de Buenos Aires, 524 pp., 1967.
- Bolker, B. e Pacala, S.W. Using Moment Equations to understand Stochastic Driven Spatial Pattern Formation in Ecological Systems. *Theor. Popul. Biol.*, 52, 179-197, 1997.
- Cantrell, R.S. e Cosner, C. On the effects of spatial heterogeneity on the persistence of interacting species. *J. Math. Biology*, 37, 103-145, 1998.

Cantrell, R.S. e Cosner, C. Spatially Explicit Models for the Population Dynamics of a Species colonizing an Island. *Math. Biosci.*, 136, 65-107, 1996.

Capasso, V. *Mathematical Structures of Epidemic Systems*, Lecture Notes in Biomathematics, vol. 97, Springer-Verlag, 1993.

Gurney, W.S.C. e Nisbet, R.M. The Regulation of Inhomogeneous Populations. *J. Theor. Biol.*, 52, 441-457, 1975.

Gurtin, M.E. e MacCamy, R. On the Diffusion of Biological Populations. *Math. Biosci.*, 33, 35-49, 1977.

Hoppensteadt, F. *Mathematical Theories of Populations: Demographics, Genetics and Epidemics*. SIAM, 1975.

Ikeda, T. e Mimura, M. An interfacial approach to regional segregation of two competing species mediated by a predator. *J. Math. Biol.*, 31, 215-240, 1993.

Kardestuncer, H. e Norrie, D.H. (ed.). *Finite Element Handbook*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

Kareiva, P.M. Local movements in herbivorous insects: applying a passive diffusion model to mark-recapture field experiments. *Oecology*, 57, 322-327, 1983.

Murray, J.D. *Mathematical Biology*. Springer, 1989.

Peaceman, D.W. e Rachford, Jr, H.H. The numerical solutions of parabolic and elliptic differential equations. *J. SIAM*, v. 3, no 1, 28-41, 1955.

Webb, G.F. A recovery-relapse epidemic model with spatial diffusion. *J. Math. Biology*, v. 14, 177-194, 1982.

Wilder, J.W., Christie, I. e Colbert, J.J. Modelling of two-dimensional spatial effects on the spread of Forest pests and their management. *Ecological Modelling*, 82, 287-298, 1995.

Uma estratégia para a simulação numérica do comportamento evolutivo de um sistema de EDP descritivo do mal-das-cadeiras de capivaras – a presença do vetor

João Frederico da C. A. Meyer, joni@ime.unicamp.br
Sílvio de Alencastro Pregnotatto, silvio@ime.unicamp.br
DMA/IMECC – UNICAMP, CP 6065, 13083-970 Campinas, SP

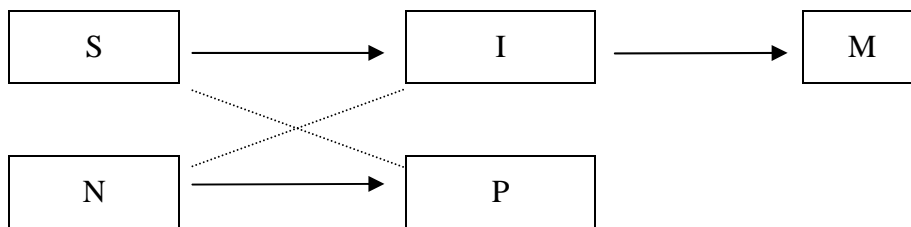
Introdução

No trabalho intitulado “Uma estratégia numérica para a simulação numérica do comportamento evolutivo de um sistema de EDP descritivo do mal-das-cadeiras de capivaras – taxa periódica de infecção” foi apresentada uma modelagem em que se fez a suposição de que o contágio de uma epidemia de mal-das-cadeiras numa população de capivaras variaria com as características oscilatórias periódicas da população do inseto transmissor e, no lugar do parâmetro constante indicativo de um contágio invariante, uma senoidal representou, então, o efeito da variação da população de insetos transmissores em termos do contágio entre roedores suscetíveis e infectados. Uma outra possibilidade, porém, de modelar o comportamento social desta endemia usando sistemas do tipo SIR com espalhamento espacial poderia ser a de incluir no sistema, além dos três compartimentos de capivaras (suscetíveis, infectadas e mortas), dois compartimentos do inseto, o dos portadores e dos não-portadores do protozoário causador do mal, além da dinâmica populacional do vetor. Neste novo quadro, os roedores continuarão a ser identificados em termos compartimentais como os suscetíveis ($S(t)$), os infectados ($I(t)$) e os mortos ($M(t)$), enquanto os insetos são divididos em portadores ($P(t)$) e não-portadores ($N(t)$). Incluindo as "varejeiras" ou

"mutucas" e sua dinâmica populacional, não é mais necessário modelar, com a senoidal adotada anteriormente, a influência abiótica em termos climáticos sobre a população, mas é necessário incluir aquelas características de dinâmica populacional dos insetos transmissores que permitam incluir sua reprodução e dependência logística da densidade.

O Modelo Matemático

O modelo proposto, na linha daqueles citados no levantamento bibliográfico é dado por:



Aqui, além das passagens possíveis de um compartimento ao seguinte, destacam-se, com linhas pontilhadas, as possibilidades de contágio, isto é, de um roedor suscetível em contato com um inseto portador do protozoário ou de um inseto não portador com uma capivara infectada. Assim, o que se tem é:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial t} - \alpha_S \Delta S + \operatorname{div}(\vec{V}.S) + \sigma_S.S &= \lambda_S.S.(1 - \frac{S+I}{K_1}) - \beta_1.S.P, \\
\frac{\partial I}{\partial t} - \alpha_I \Delta I + \sigma_I.I &= \beta_1.S.P - \gamma.I, \\
\frac{\partial M}{\partial t} &= \gamma.I, \\
\frac{\partial N}{\partial t} - \alpha_N \Delta N + \operatorname{div}(\vec{W}.N) + \sigma_N.N &= \lambda_N.(P+N).(1 - \frac{P+N}{K_2}) - \beta_2.N.I, \\
\frac{\partial P}{\partial t} - \alpha_N \Delta P + \operatorname{div}(\vec{W}.P) + \sigma_N.P &= \beta_2.N.I, \\
\text{para } (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ e } t \in (0,T].
\end{aligned} \tag{1}$$

Apesar de se repetirem alguns dos coeficientes já descritos no modelo anterior nos quais havia apenas três compartimentos, vale a pena defini-los formalmente:

- α_S : dispersão populacional (difusibilidade) das capivaras não contaminadas,
- α_I : dispersão populacional das capivaras infectadas,
- α_N : dispersão populacional dos insetos – que assumimos ser a mesma para portadores e não portadores,
- σ_S : mortalidade de capivaras suscetíveis por fatores representativos de hostilidade do meio,
- σ_I : mortalidade de capivaras infectadas por fatores representativos da hostilidade do meio - e não pela infecção em si, e
- σ_N : mortalidade de insetos por fatores representativos da hostilidade do meio (este coeficiente é igual para insetos portadores e não portadores do protozoário).

- λ_S : taxa intrínseca de crescimento de capivaras sadias, e
- λ_N : taxa intrínseca de crescimento dos insetos (considera-se que insetos portadores e insetos não-portadores têm ambos crias não-portadoras).
- β_1 : taxa de infecção de capivaras sadias por contato (picada) de insetos portadores,
- β_2 : taxa de transformação de insetos não portadores em portadores por contato (picada) em capivaras infectadas.
- γ : taxa de mortalidade de capivaras infectadas.
- K_1 : capacidade de suporte do meio para as capivaras e
- K_2 : capacidade de suporte do meio para insetos (portadores ou não).
- Ainda,
- V : vetor direção e intensidade de uma possível migração de capivaras e
- W : vetor direção e intensidade de uma possível migração de insetos.

As condições de contorno que serão aqui usadas são de tipo homogêneo misto, com partes da fronteira em que não há capivaras nem varejeiras, e partes da fronteira em que não há passagem de indivíduos dessas duas espécies:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial S(x, y; t)}{\partial \eta} \right|_{(x, y) \in \Gamma_1} &= 0 \text{ e } S(x, y; t)|_{(x, y) \in \Gamma_0} = 0, \\
\left. \frac{\partial I(x, y; t)}{\partial \eta} \right|_{(x, y) \in \Gamma_1} &= 0 \text{ e } I(x, y; t)|_{(x, y) \in \Gamma_0} = 0, \\
\left. \frac{\partial M(x, y; t)}{\partial \eta} \right|_{(x, y) \in \Gamma_1} &= 0 \text{ e } M(x, y; t)|_{(x, y) \in \Gamma_0} = 0, \\
\left. \frac{\partial N(x, y; t)}{\partial \eta} \right|_{(x, y) \in \Gamma_1} &= 0 \text{ e } N(x, y; t)|_{(x, y) \in \Gamma_0} = 0, \\
\left. \frac{\partial P(x, y; t)}{\partial \eta} \right|_{(x, y) \in \Gamma_1} &= 0 \text{ e } P(x, y; t)|_{(x, y) \in \Gamma_0} = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

Tanto o modelo quanto o algoritmo se prestam, de modo muito simples a condições de contorno bem mais complexas, do tipo da descrita abaixo, para a população de Suscetíveis, mas ilustrando todos os compartimentos:

$$-a \cdot \frac{\partial S}{\partial \eta} + b \cdot S = g, \text{ com } a, b \text{ e } g \text{ definidos apropriadamente.}$$

Em termos de condições iniciais, adota-se uma distribuição homogênea de roedores suscetíveis, um foco restrito de capivaras infectadas e, de início, nenhum animal morto pela endemia. Analogamente, iremos considerar distribuição homogênea apenas de varejeiras, sem que haja, nesse instante inicial, portadores:

$$S(x, y, 0) = S_0 = \text{constante}, I(x, y, 0) = I_0(x, y), M(x, y, 0) = 0, N(x, y, 0) = N_0 = \text{constante} \text{ e } P(x, y, 0) = 0, \text{ em todo o domínio } \Omega.$$

Como anteriormente, e fazendo uso das condições de contorno adotadas, iremos passar à formulação variacional, para obter o problema do estudo da endemia das capivaras conjuntamente com a dinâmica populacional das varejeiras tanto portadoras quanto não portadoras do protozoário *trypanossoma equus*. O que se obtém é o problema:

Achar $S = S(x,y,t)$, $I = I(x,y,t)$, $M = M(x,y,t)$, $N = N(x,y,t)$ e $P = P(x,y,t)$, num espaço H convenientemente definido, satisfazendo as condições indicadas acima. Como já foi mencionado em (3.10), necessitaremos também do espaço de funções teste, V . Assim,

$$\begin{aligned}
 H &= \{ u : \forall t \in (0, T], u \in H^1(\Omega), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\Omega) \text{ e } u|_{\Gamma_0} = 0 \} \\
 V &= \{ v : v \in H^1(\Omega) \text{ e } v|_{\Gamma_0} = 0 \}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial S}{\partial t} \mid v \right) + \alpha_s (\nabla S \parallel \nabla v) + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla} S \mid v) + \sigma_s (S \mid v) = \\
 &= \lambda_s (S \mid v) - \frac{\lambda_s}{K_1} ((S + I)^2 \mid v) - \beta_1 \cdot (S \cdot P \mid v), \\
 & \left(\frac{\partial I}{\partial t} \mid v \right) - \alpha_I (\nabla I \parallel \nabla v) + \sigma_I (I \mid v) = +\beta_1 \cdot (S \cdot P \mid v) - \gamma (I \mid v), \\
 & \left(\frac{\partial M}{\partial t} \mid v \right) = \gamma (I \mid v), \\
 & \left(\frac{\partial N}{\partial t} \mid v \right) + \alpha_N (\nabla N \parallel \nabla v) + (\vec{W} \cdot \vec{\nabla} N \mid v) + \sigma_N (N \mid v) = \\
 &= \lambda_N (P + N \mid v) - \frac{\lambda_N}{K_2} ((P + N)^2 \mid v) - \beta_2 \cdot (N \cdot I \mid v), \\
 & \left(\frac{\partial P}{\partial t} \mid v \right) + \alpha_N (\nabla P \parallel \nabla v) + (\vec{W} \cdot \vec{\nabla} P \mid v) + \sigma_N (P \mid v) = \beta_2 \cdot (N \cdot I \mid v), \\
 & \text{para } \forall v \in V.
 \end{aligned} \tag{3}$$

O modelo discretizado

Visando o uso do método de elementos finitos no espaço, usado junto com o de diferenças finitas para o tempo, iremos discretizar as funções que descrevem cada um dos compartimentos populacionais, procedendo, também a uma separação de variáveis:

$$\begin{aligned}
S_h &= \sum_{j=1}^N p_j(t) \cdot \varphi_j(x, y), \\
I_h &= \sum_{j=1}^N q_j(t) \cdot \varphi_j(x, y), \\
M_h &= \sum_{j=1}^N r_j(t) \cdot \varphi_j(x, y), \\
N_h &= \sum_{j=1}^N c_j(t) \cdot \varphi_j(x, y), \\
\text{e } P_h &= \sum_{j=1}^N d_j(t) \cdot \varphi_j(x, y).
\end{aligned} \tag{4}$$

Usando estas aproximações em (3), obtem-se o sistema não-linear de Equações Diferenciais Ordinárias dado por:

$$\begin{aligned}
& \sum_j \frac{dp_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_s \sum_j p_j(t) (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \sum_j p_j(t) (\vec{W} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + (\sigma_s - \lambda_s) \sum_j p_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\lambda_s}{K_1} \sum_j p_j(t) \sum_l p_l(t) \cdot (\varphi_l \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\lambda_s}{K_1} \sum_j p_j(t) \sum_l q_l(t) \cdot (\varphi_l \varphi_j | \varphi_i) + \beta_1 \sum_j p_j(t) \sum_l d_l(t) (\varphi_l \varphi_j | \varphi_i) = 0, \\
& \sum_j \frac{dq_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_i \sum_j q_j(t) (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + (\sigma_i + \gamma) \sum_j q_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \beta_1 \sum_j p_j(t) \sum_l d_l(t) \cdot (\varphi_l \varphi_j | \varphi_i) = 0, \\
& \sum_j \frac{dr_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) - \gamma \sum_j q_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) = 0, \\
& \sum_j \frac{dc_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_N \sum_j c_j(t) (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \sum_j c_j(t) (\vec{W} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + (\sigma_N - \lambda_N) \sum_j c_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \lambda_N \sum_j d_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\lambda_N}{K_2} \sum_j c_j \sum_l c_l(t) \cdot (\varphi_l \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + 2 \frac{\lambda_N}{K_2} \sum_j c_j(t) \sum_l d_l(t) \cdot (\varphi_l \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\lambda_N}{K_2} \sum_j d_j(t) \sum_l d_l(t) \cdot (\varphi_l \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \beta_2 \sum_j c_j(t) \sum_l q_l(t) (\varphi_l \varphi_j | \varphi_i) = 0, \tag{5} \\
& \sum_j \frac{dd_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_N \sum_j d_j(t) (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \sum_j d_j(t) (\vec{W} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \sigma_N \sum_j d_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) - \beta_2 \sum_j c_j(t) \sum_l q_l(t) (\varphi_l \varphi_j | \varphi_i) = 0
\end{aligned}$$

A seguir, iremos substituir os termos de variação temporal, usando o método implícito de Crank-Nicolson, isto é, procedendo às aproximações exaustivamente mencionadas, e repetidas:

$$\frac{dx_j(t_n + \Delta t/2)}{dt} \cong \frac{x_j(t_{n+1}) - x_j(t_n)}{\Delta t} \text{ com erro da ordem de } (\Delta t)^2 \text{ e}$$

$$x_j(t_n + \Delta t/2) \cong \frac{x_j(t_{n+1}) + x_j(t_n)}{2} \text{ com erro da mesma ordem.}$$

Denominando $p_j^{(n)}$, $q_j^{(n)}$, $r_j^{(n)}$, $c_j^{(n)}$ e $d_j^{(n)}$ as aproximações temporais de p , q , r , c e d nos nós (x_j, y_j, t_n) , pode-se obter:

$$\begin{aligned} & \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} - p_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_s \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \\ & + \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\vec{\nabla} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + (\sigma_s - \lambda_s) \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) + \\ & + \frac{\lambda_s}{K_1} \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} \cdot \sum_l \left(\frac{p_l^{(n+1)} + p_l^{(n)}}{2} + \frac{q_l^{(n+1)} + q_l^{(n)}}{2} \right) (\varphi_l \varphi_j | \varphi_i) \\ & + \beta_1 \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} \sum_l \frac{d_l^{(n+1)} + d_l^{(n)}}{2} (\varphi_l \varphi_j | \varphi_i) = 0 \\ & \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} - q_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_1 \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \\ & + (\sigma_1 + \gamma) \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) - \\ & - \beta_1 \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} \sum_l \frac{d_l^{(n+1)} + d_l^{(n)}}{2} (\varphi_l \varphi_j | \varphi_i) = 0 \\ & \sum_j \frac{r_j^{(n+1)} - r_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) - \gamma \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} - q_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_j \frac{c_j^{(n+1)} - c_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_N \sum_j \frac{c_j^{(n+1)} + c_j^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j || \nabla \varphi_i) + \\
& + \sum_j \frac{c_j^{(n+1)} + c_j^{(n)}}{2} (\overrightarrow{W} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + (\sigma_N - \lambda_N) \sum_j \frac{c_j^{(n+1)} + c_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\lambda_N}{K_2} \sum_j \frac{c_j^{(n+1)} + c_j^{(n)}}{2} \sum_l \left(\frac{c_l^{(n+1)} + c_l^{(n)}}{2} + 2 \cdot \frac{d_l^{(n+1)} + d_l^{(n)}}{2} \right) (\varphi_l \varphi_j | \varphi_i) \\
& + \frac{\lambda_N}{K_2} \sum_j \frac{d_j^{(n+1)} + d_j^{(n)}}{2} \sum_l \frac{d_l^{(n+1)} + d_l^{(n)}}{2} (\varphi_l \varphi_j | \varphi_i) - \lambda_N \sum_j \frac{d_j^{(n+1)} + d_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) = 0 \\
\\
& \sum_j \frac{d_j^{(n+1)} - d_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_N \sum_j \frac{d_j^{(n+1)} + d_j^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j || \nabla \varphi_i) + \\
& + \sum_j \frac{d_j^{(n+1)} + d_j^{(n)}}{2} (\overrightarrow{W} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + (\sigma_N) \sum_j \frac{d_j^{(n+1)} + d_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \beta_2 \Delta t \sum_j \frac{c_l^{(n+1)} + c_l^{(n)}}{2} \sum_l \frac{q_l^{(n+1)} + q_l^{(n)}}{2} (\varphi_l \varphi_j | \varphi_i) = 0
\end{aligned}$$

Neste sistema, separando em cada equação os termos em t_{n+1} e em t_n da correspondente população e reagrupando-os convenientemente para facilitar a implementação do algoritmo, obtem-se:

$$\begin{aligned}
& \sum_j p_j^{(n+1)} \left\{ \left[1 + \frac{(\sigma_s - \lambda_s) \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_s \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) + \right. \\
& V_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + V_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \frac{\beta_1 \Delta t}{4} \sum_1 \left(d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)} \right) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) + \\
& \left. \frac{\lambda_s \Delta t}{4 K_1} \sum_1 \left(p_1^{(n+1)} + p_1^{(n)} + q_1^{(n+1)} + q_1^{(n)} \right) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) \right\} = \\
& \sum_j p_j^{(n)} \left\{ \left[1 - \frac{(\sigma_s - \lambda_s) \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_s \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) - \right. \\
& V_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - V_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - \frac{\beta_1 \Delta t}{4} \sum_1 \left(d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)} \right) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) - \\
& \left. \frac{\lambda_s \Delta t}{4 K_1} \sum_1 \left(p_1^{(n+1)} + p_1^{(n)} + q_1^{(n+1)} + q_1^{(n)} \right) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) \right\}, \\
& \sum_j q_j^{(n+1)} \left\{ \left[1 + \frac{(\sigma_1 + \gamma) \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_1 \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) \right\} = \\
& \sum_j q_j^{(n)} \left\{ \left[1 - \frac{(\sigma_1 + \gamma) \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_1 \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) \right\} + \\
& \frac{\beta_1 \Delta t}{4} \sum_j (p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}) \sum_1 (d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i), \\
& \sum_j r_j^{(n+1)} (\varphi_j | \varphi_i) = \sum_j r_j^{(n)} (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\gamma \Delta t}{2} \sum_j (q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}) (\varphi_j | \varphi_i),
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_j c_j^{(n+1)} \left\{ \left[1 + \frac{(\sigma_N - \lambda_N) \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_N \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \right. \\
& W_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + W_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \\
& \frac{\lambda_N \Delta t}{2K_2} \sum_1 (d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\beta_2 \Delta t}{4} \sum_1 (q_1^{(n+1)} + q_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) + \\
& \frac{\lambda_N \Delta t}{4K_2} \sum_1 (c_1^{(n+1)} + c_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) \} = \\
& \sum_j c_j^{(n)} \left\{ \left[1 - \frac{(\sigma_N - \lambda_N) \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_N \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \right. \\
& W_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - W_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - \frac{\beta_2 \Delta t}{4} \sum_1 (q_1^{(n+1)} + q_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) - \\
& \frac{\lambda_N \Delta t}{2K_2} \sum_1 (d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\lambda_N \Delta t}{4K_2} \sum_1 (c_1^{(n+1)} + c_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) \} + \\
& \frac{\lambda_N \Delta t}{2} \sum_j (d_j^{(n+1)} - d_j^{(n)}) * [(\varphi_j | \varphi_i) + \frac{1}{2K_2} \sum_1 (d_1^{(n+1)} - d_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i)], \\
& \sum_j d_j^{(n+1)} \left\{ \left[1 + \frac{\sigma_N \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_N \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \right. \\
& W_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + W_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) \} = \\
& \sum_j d_j^{(n)} \left\{ \left[1 - \frac{\sigma_N \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_N \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \right. \\
& W_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - W_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) \} + \\
& \frac{\beta_2 \Delta t}{4} \sum_j (c_j^{(n+1)} + c_j^{(n)}) \sum_1 (q_1^{(n+1)} + q_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i), \\
& \text{para } \forall \varphi_i \in \text{base de } V_h.
\end{aligned}$$

O algoritmo

Dados $S^{(0)}$, $I^{(0)}$, $M^{(0)}$, $N^{(0)}$ e $P^{(0)}$, obtêm-se os sucessivos valores de $S^{(n)}$, $I^{(n)}$, $M^{(n)}$, $N^{(n)}$ e $P^{(n)}$ resolvendo o sistema não-linear abaixo fazendo uso de aproximação linear iterativa que, por simplicidade, não vai aqui explicitada:

$$U_S(S^{(n)}, S^{(n+1)}, I^{(n)}, I^{(n+1)}, P^{(n+1)}, P^{(n)}) \cdot S^{(n+1)} = W_S(S^{(n)}, S^{(n+1)}, I^{(n)}, I^{(n+1)}, P^{(n+1)}, P^{(n)}) \cdot S^{(n)},$$

$$U_I(S^{(n)}, S^{(n+1)}, I^{(n)}, I^{(n+1)}, P^{(n+1)}, P^{(n)}) \cdot I^{(n+1)} = W_I(S^{(n)}, S^{(n+1)}, I^{(n)}, I^{(n+1)}, P^{(n+1)}, P^{(n)}) \cdot I^{(n)} + w_I(S^{(n+1)}, S^{(n)}, N^{(n+1)}, N^{(n)}),$$

$$U_M \cdot M^{(n+1)} = W_M \cdot M^{(n)} + w_M(I^{(n+1)}, I^{(n)}),$$

$$U_N(I^{(n+1)}, I^{(n)}, N^{(n+1)}, N^{(n)}, P^{(n+1)}, P^{(n)}) \cdot N^{(n+1)} = W_N(I^{(n+1)}, I^{(n)}, N^{(n+1)}, N^{(n)}, P^{(n+1)}, P^{(n)}) \cdot N^{(n)} + w_N(P^{(n+1)}, P^{(n)}),$$

$$U_P \cdot P^{(n+1)} = W_P \cdot P^{(n)} + w_P(I^{(n+1)}, I^{(n)}, N^{(n+1)}, N^{(n)}), \text{ onde os operadores não lineares}$$

$$U_S, W_S, U_I, W_I, U_N, W_N, \text{ as matrizes } U_M, W_M, U_P, W_P \text{ e os vetores } w_I(S^{(n+1)}, S^{(n)}, N^{(n+1)}, N^{(n)}),$$

$$w_M(I^{(n+1)}, I^{(n)}) \text{ e } w_P(I^{(n+1)}, I^{(n)}, N^{(n+1)}, N^{(n)}), \text{ são dados, respectivamente, por:}$$

$$\begin{aligned}
U_S(i, j) &= \left\{ \left[1 + \frac{(\sigma_S - \lambda_S)\Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_S \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \right. \\
&V_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + V_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \frac{\beta_1 \Delta t}{4} \sum_1 \left(d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)} \right) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) + \\
&\left. \frac{\lambda_S \Delta t}{4K_1} \cdot \sum_1 \left(p_1^{(n+1)} + p_1^{(n)} + q_1^{(n+1)} + q_1^{(n)} \right) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) \right\}, \\
W_S(i, j) &= \left\{ \left[1 - \frac{(\sigma_S - \lambda_S)\Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_S \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \right. \\
&V_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - V_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - \frac{\beta_1 \Delta t}{4} \sum_1 \left(d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)} \right) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) - \\
&\left. \frac{\lambda_S \Delta t}{4K_1} \cdot \sum_1 \left(p_1^{(n+1)} + p_1^{(n)} + q_1^{(n+1)} + q_1^{(n)} \right) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) \right\}, \\
U_I(i, j) &= \left\{ \left[1 + \frac{(\sigma_I + \gamma)\Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_I \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) \right\}, \\
W_I(i, j) &= \left\{ \left[1 - \frac{(\sigma_I + \gamma)\Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_I \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) \right\}, \text{com} \\
w_I(i) &= \sum_j \frac{\beta_1 \Delta t}{4} (p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}) \cdot \sum_1 (d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i), \\
U_M(i, j) &= (\varphi_j | \varphi_i), e \\
W_M(i, j) &= (\varphi_j | \varphi_i), \text{com} w_M(i) = \frac{\gamma \Delta t}{2} \sum_j (q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}) (\varphi_j | \varphi_i). \\
U_N(i, j) &= \left\{ \left[1 + \frac{(\sigma_N - \lambda_N)\Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_N \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \right. \\
&W_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + W_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) +
\end{aligned} \tag{8}$$

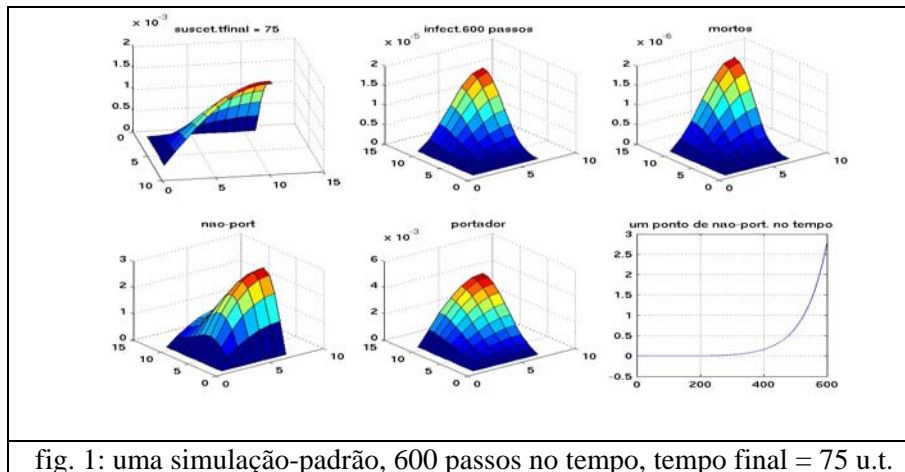
$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda_N \Delta t}{2K_2} \sum_i (d_i^{(n+1)} + d_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\beta_2 \Delta t}{4} \sum_i (q_i^{(n+1)} + q_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) + \\
& \frac{\lambda_N \Delta t}{4K_2} \sum_i (c_i^{(n+1)} + c_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) \}, \\
W_N(i, j) = & \{ [1 - \frac{(\sigma_N - \lambda_N) \Delta t}{2}] (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_N \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j || \nabla \varphi_i) - \\
W_1 \frac{\Delta t}{2} (\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i) - W_2 \frac{\Delta t}{2} (\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i) - & \frac{\beta_2 \Delta t}{4} \sum_i (q_i^{(n+1)} + q_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) - \\
\frac{\lambda_N \Delta t}{2K_2} \sum_i (d_i^{(n+1)} + d_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) - & \frac{\lambda_N \Delta t}{4K_2} \sum_i (c_i^{(n+1)} + c_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) \}, \\
w_N(i) = & \frac{\lambda_N \Delta t}{2} \sum_j (d_j^{(n+1)} - d_j^{(n)}) \cdot [(\varphi_j | \varphi_i) + \frac{1}{2K_2} \sum_i (d_i^{(n+1)} - d_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i)], \\
U_P(i, j) = & \{ [1 + \frac{\sigma_N \Delta t}{2}] (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_N \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j || \nabla \varphi_i) + \\
W_1 \frac{\Delta t}{2} (\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i) + W_2 \frac{\Delta t}{2} (\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i) \}, & \\
W_P(i, j) = & \{ [1 - \frac{\sigma_N \Delta t}{2}] (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_N \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j || \nabla \varphi_i) - \\
W_1 \frac{\Delta t}{2} (\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i) - W_2 \frac{\Delta t}{2} (\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i) \}, & \text{com} \\
w_P(i) = & \frac{\beta_2 \Delta t}{4} \sum_j (c_j^{(n+1)} + c_j^{(n)}) \sum_i (q_i^{(n+1)} + q_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i).
\end{aligned}$$

Este algoritmo foi programado no ambiente do Matlab, usando estruturas de matrizes esparsas, e foi possível obter, para um domínio genérico, resultados que vêm sistematicamente de acordo com os fenômenos observados. Cabe mencionar o longo tempo despendido em cada ensaio numérico, dada a necessidade de serem resolvidos diversos sistemas lineares a cada um dos passos no tempo, além, claro, das operações

matriciais e vetoriais. Isto correspondeu a algo entre centenas e milhares de resoluções de sistemas lineares com matrizes da ordem de 60×60 . O tempo para estas execuções deverá cair rapidamente em função de uma melhoria significativa de recursos computacionais.

A seguir, iremos apresentar, apenas visualmente, os resultados de alguns desses ensaios.

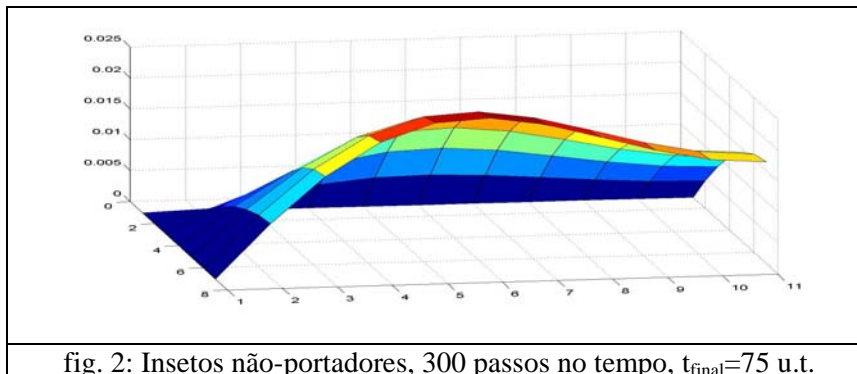
No caso abaixo (fig. 1), para um período relativamente curto de tempo (tempo final escolhido como 75 u.t.), podemos observar que a única população significativamente presente no meio é de insetos portadores. Além do mais, as populações de infectados, mortos e de insetos não-portadores, se concentram em torno do ponto em que primeiro apareceram os insetos portadores, enquanto que a população de insetos suscetíveis segue seu caminho verhulstiano:



Observamos que a população de insetos não-portadores está crescendo no ponto genérico do domínio que foi escolhido para se ter uma visão evolutiva do processo, apesar da presença de insetos e de animais infectados. Observamos também que há,

ainda, coincidência nas concentrações de populações de mamíferos, mas não na de insetos.

A figura 2 destaca o gráfico de não-portadores numa perspectiva de mais fácil visualização. Pode-se observar que, na região em que se concentra a maior quantidade de insetos portadores, a concentração dos não-portadores já iniciou um processo de queda populacional:



Com mais tempo, porém, essa aparente concordância de comportamentos tanto de capivaras suscetíveis e infectadas, quanto de insetos portadores e não-portadores deixa de se manifestar, surgindo uma presença por assim dizer complementar, aliás esperada! São, evidentemente, mais passos no tempo (no caso da fig. 3, o tempo final foi considerado como 750 unidades, e foram usados 1500 passos no tempo):

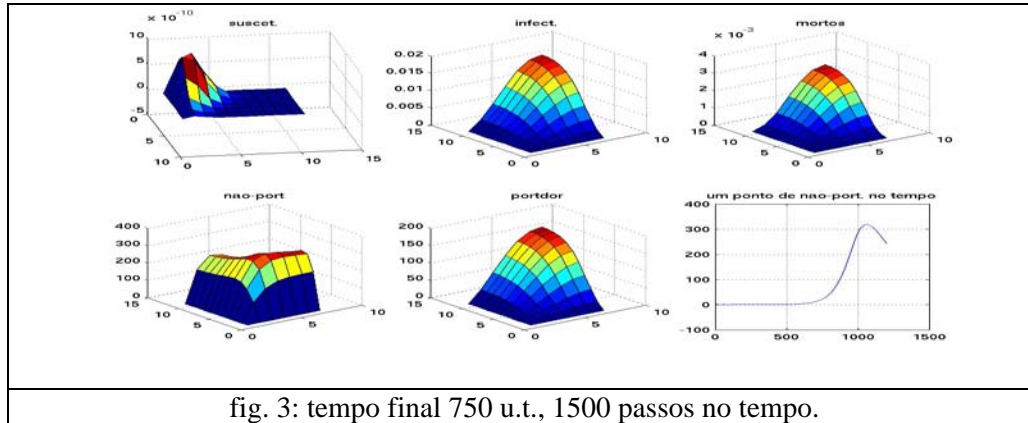


fig. 3: tempo final 750 u.t., 1500 passos no tempo.

Da figura 3 acima, podemos destacar duas superfícies na figura 4: a de capivaras suscetíveis e aquela de insetos não portadores. O objetivo deste destaque é o de enfatizar a mudança de comportamento à medida que o tempo evolui. Ocorre uma presença complementar com relação, respectivamente, às populações de mamíferos infectados e de insetos portadores. Ora esta situação é como a que se descreve *in loco*, quando os guias e guardas florestais (a denominação permanece embora não haja, formalmente, florestas a serem guardadas...) relatam o desaparecimento de capivaras sãs (que na superfície $S(x,y,t)$ se deslocam para as fronteiras mais distantes do domínio), e seu ressurgimento passado o período de algumas gerações. Podemos observar também que, após o crescimento inicial da população de insetos não portadores, vem sua queda, tendo a população de insetos passado para o compartimento de portadores, em grande parte devido ao crescimento da população de roedores infectados.

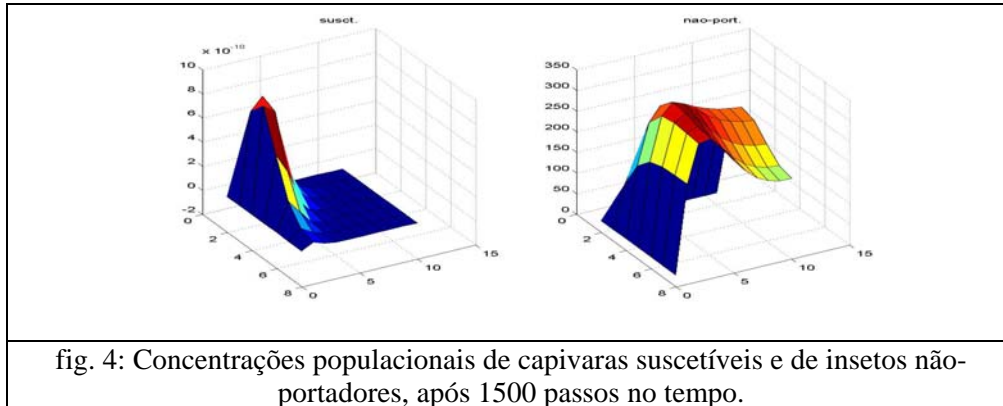


fig. 4: Concentrações populacionais de capivaras suscetíveis e de insetos não-portadores, após 1500 passos no tempo.

Conclusão

Embora continue a valer, para este tipo de modelo, a crítica àqueles sistemas que “isolam” populações que se encontram imersas em ecossistemas muito mais complexos, este tipo de esforço pode se constituir em formidável ferramenta para a avaliação de estratégias de manejo, e sua adoção (ou rejeição!) visando técnicas de comunidades sustentáveis – um dos principais modos de se repensar nosso convívio com regiões que ainda conseguem conservar características naturais. Neste caso, o do pantanal no nordeste argentino, os “Esteros de Ibera”.

Referências

- Banks, H.T. e Kareiva, P. Parameter Estimation Techniques for Transport Equations with Application to Population Dispersal and Tissue Bulk Flow Models. *J. Math. Biol.*, 17, 253-273, 1983.
- Bassanezi, R.C. e Ferreira Jr., W.C. Equações Diferenciais e Aplicações, HARBRA, 1988.
- Boch, J. e Supperer, R. Parasitologia em medicina veterinária. Ed. Hemisfério Sur S.A., Buenos Aires, 627 pp., 1992.
- Boero, J.J. Parasitosis animalis. Ed. Universitaria de Buenos Aires, 524 pp., 1967.
- Bolker, B. e Pacala, S.W. Using Moment Equations to understand Stochastic Driven Spatial Pattern Formation in Ecological Systems. *Theor. Popul. Biol.*, 52, 179-197, 1997.
- Cantrell, R.S. e Cosner, C. On the effects of spatial heterogeneity on the persistence of interacting species. *J. Math. Biology*, 37, 103-145, 1998.
- Cantrell, R.S. e Cosner, C. Spatially Explicit Models for the Population Dynamics of a Species colonizing an Island. *Math. Biosci.*, 136, 65-107, 1996.
- Capasso, V. Mathematical Structures of Epidemic Systems, Lecture Notes in Biomathematics, vol. 97, Springer-Verlag, 1993.
- Gurney, W.S.C. e Nisbet, R.M. The Regulation of Inhomogeneous Populations. *J. Theor. Biol.*, 52, 441-457, 1975.
- Gurtin, M.E. e MacCamy, R. On the Diffusion of Biological Populations. *Math. Biosci.*, 33, 35-49, 1977.

Hoppensteadt, F. Mathematical Theories of Populations: Demographics, Genetics and Epidemics. SIAM, 1975.

Ikeda, T. e Mimura, M. An interfacial approach to regional segregation of two competing species mediated by a predator. *J. Math. Biol.*, 31, 215-240, 1993.

Kardestuncer, H. e Norrie, D.H. (ed.). Finite Element Handbook. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

Kareiva, P.M. Local movements in herbivorous insects: applying a passive diffusion model to mark-recapture field experiments. *Oecology*, 57, 322-327, 1983.

Murray, J.D. Mathematical Biology. Springer, 1989.

Peaceman, D.W. e Rachford, Jr, H.H. The numerical solutions of parabolic and elliptic differential equations. *J. SIAM*, v. 3, no 1, 28-41, 1955.

Webb, G.F. A recovery-relapse epidemic model with spatial diffusion. *J. Math. Biology*, v. 14, 177-194, 1982.

Wilder, J.W., Christie, I. e Colbert, J.J. Modelling of two-dimensional spatial effects on the spread of Forest pests and their management. *Ecological Modelling*, 82, 287-298, 1995.

Fuzzy rules in asymptomatic HIV virus infected individuals model

Rosana Sueli da Motta Jafelice
FAMAT - UFU / UNICAMP – *rosanam@dca.fee.unicamp.br*

Laécio Carvalho de Barros , Rodney Carlos Bassanezi
IMECC – UNICAMP
laeciocb@ime.unicamp.br, rodney@ime.unicamp.br

Fernando Gomide
FEEC – UNICAMP - *gomide@dca.fee.unicamp.br*

Abstract

The purpose of this paper is to study of the evolution of positive HIV population for manifestation of AIDS (Acquired Immunodeficiency Syndrome). Our main interest is to model the transference rate in this stage. For this purpose, we use expert information on transference rate because it strongly depends of the viral load and of the level $CD4+$ of the infected individuals. More specifically, the transference rate is modeled as a fuzzy set that depends of the knowledge on viral load and $CD4+$, respectively. The main difference between this model and the classic one relies on the biological meaning of the transference rate λ . Medical science uses linguistic notions to characterize disease stages and to specify anti-retroviral therapy. Fuzzy set theory provides the formal framework to model linguistic descriptions such as the transference rate λ using expert knowledge.

1. INTRODUCTION

In the last decade, the mathematical literature on imprecision and uncertainty has grown considerably, especially in system modeling, control theory, and engineering areas. More recently, several authors have used the fuzzy set theory in epidemiology problems [6] and population dynamics [2].

Since the advent of the HIV infection, several mathematical models have been developed to describe its dynamics [3] and [5]. In this paper fuzzy set theory, introduced in the sixties by Lotfi Zadeh [9], is used to deal with imprecision on the time instant or moment in which AIDS begins its manifestation. Our study considers the transference rate λ , as used in the classical Anderson's model [3], as a fuzzy set.

Fuzzy set theory is a genuine generalization of classical set theory [1], [7] and [9] useful to model unsharp classes. In this paper, the parameter λ is viewed as a linguistic variable whose values are fuzzy sets that depends on the viral load v and on the $CD4+$ level. $CD4+$ is the main T lymphocyte attacked by the HIV retrovirus when it reaches the bloodstream. The notion of λ rate as a linguistic variable with fuzzy values captures its biological meaning more faithfully [6] and [7] to classify the disease stages, and to decide on when the antiretroviral therapy should be used. We assume that, initially, the fraction of infected asymptomatic individuals x is maximum and equal to 1, and that the fraction of AIDS symptomatic individuals y is null. The next section introduces the main definitions needed in this paper.

2. PRELIMINARY DEFINITIONS

A *fuzzy subset* F of the universe set U is defined by a *membership* function u that assigns to each element x of U a number $u(x)$ between zero and one to mean the degree of membership from x to F . Therefore, the fuzzy subset (or *set*, for short) F is its membership function $u: U \rightarrow [0,1]$. In this paper we will use the membership function u to denote the fuzzy set F . It is interesting to observe that a classic subset A of U is a particular fuzzy set for which the membership function is the characteristic function of A , this is, $\chi_A: U \rightarrow \{0,1\}$. The main tool that we will rely on in this paper concerns fuzzy rule-based systems [7], whose architecture is shown in figure 1. The method of fuzzy inference chosen is referred to as the Mamdani method.

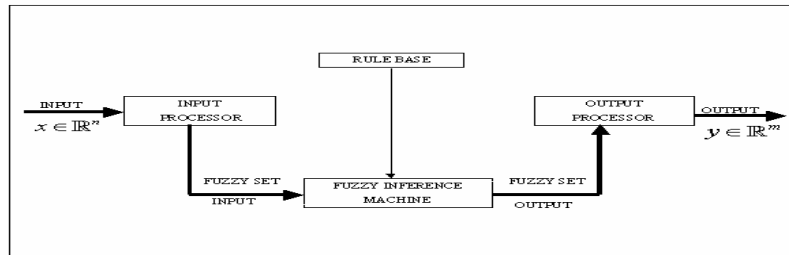


Figure 1: Architecture of fuzzy rule-based systems.

3. CLASSIC MODEL

The classical Anderson's model (1986) for AIDS is given by:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\lambda(t)x & x(0) &= 1 \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda(t)x = \lambda(t)(1-y) & y(0) &= 0\end{aligned}\quad (1)$$

where $\lambda(t)$ is the transference rate between infected individuals and infected individuals that develop AIDS, x is the proportion of infected population that does not have AIDS symptoms yet, and y is the proportion of the population that has developed AIDS symptoms. Anderson assumes $\lambda(t) = at$, $a > 0$. Thus the solution of (1) is

$$x(t) = e^{-\frac{at^2}{2}} \quad y(t) = 1 - e^{-\frac{at^2}{2}} \quad (2)$$

4. FUZZY MODEL

When the HIV reaches the bloodstream, it attacks mainly the lymphocyte T of the $CD4+$ type. The amount of cells $CD4+$ in periferic blood has prognostics implication in infection evolution by HIV. Nowadays, the amount of immunocompetence cells is the most clinically useful and acceptable measure to treat of infected individuals by HIV, although it is not the only one. We can classify the amount of $CD4+$ cells/ml in the peripheral blood in four ranges (see: www.aids.gov.br):

1. $CD4+ > 0.5$ cells/ml: Stage of infection by HIV with low risk of to develop disease.

2. $CD4+$ between 0.2 and 0.5 cells/ml: Stage characterized for appearance of signs and shorter symptoms or constitutional alterations. Moderate risk to develop opportunist diseases.

3. $CD4+$ between 0.05 e 0.2 cells/ml: Stage with high possibility to develop opportunist diseases.

4. $CD4+ < 0.05$ cells/ml: High risk of get opportunist diseases such as Kaposi's sarcoma. High life risk and low survival chances.

On the other hand, a low HIV viral load not enough to destroy all the lymphocyte $CD4+$ of the organism. Thus, antibodies have chances to act against opportunist diseases. High viral load destroys large quantities of lymphocyte $CD4+$ and the immunologic system may lose its function.

In the beginning (or when change of anti-retroviral therapy occurs), the literature recommend viral load exams within one to two months period to evaluate the treatment. The results should be interpreted of the following way:

1. Viral load below of 10.000 copies of RNA by ml: low risk of disease progression.

2. Viral load between 10.000 and 100.000 copies of RNA by ml: moderate risk of disease progression.

3. Viral load above of 100.000 copies of RNA by ml: high risk of disease progression.

The identification of the disease stages and its respective treatment is based on the relation between viral load and $CD4+$ cells level. Control of the viral load and $CD4+$ cells level may interfere in the transference rate λ control.

Thus, the conversion from an asymptomatic individual to a symptomatic individual depends on the individual characteristics, as measured by the viral load v and $CD4+$. Therefore, we suggest the following modification of (1):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda(v, CD4+)x & x(0) &= 1 \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda(v, CD4+)x = \lambda(v, CD4+)(1-y) & y(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

The difference between this and the first model (1) is that now the parameter $\lambda = \lambda(v, CD4+)$ has a clear biological meaning and thus is a more faithful characterization of λ . From the mathematical point of view we can think of (3) as a parametric family of systems. In this case, λ is the parameter dependent of v and $CD4+$. It seems reasonable that λ , and consequently of the population y , can be controlled via v and $CD4+$. From (3) we have

$$x(t) = e^{-\lambda(v, CD4+)t} \quad y(t) = 1 - e^{-\lambda(v, CD4+)t}, \quad t > 0 \quad (4)$$

5. LINGUISTIC VARIABLES AND RULES BASE

Estimation of the transference rate $\lambda = \lambda(v, CD4+)$ is based on expert medical information. We adopt a fuzzy rule-based modeling approach assuming that the viral load (v), the $CD4+$ level, and the transference rate (λ) are linguistic variables [7]. According to section 4, the viral load is classified as low, medium and high whereas the $CD4+$ level is classified as very low, low, medium, high medium and high. The transference rate λ is classified as weak, medium weak, medium and strong. The $CD4+$ level between 0.2 and 0.5 cells/ml is divided in two ranges because it relates with an important phase of the transference of asymptomatic to symptomatic.

The fuzzy rule-based model uses the Mamdani inference method to derive the values of λ assuming the membership functions shown in figures 2, 3 and 4 and the following rule- base:

1. If v is low and $CD4+$ is very low then λ is strong.
2. If v is low and $CD4+$ is low then λ is medium.
3. If v is low and $CD4+$ is medium then λ is medium.
4. If v is low and $CD4+$ is high medium then λ is weak medium.
5. If v is low and $CD4+$ is high then λ is weak.
6. If v is medium and $CD4+$ is very low then λ is strong.
7. If v is medium and $CD4+$ is low then λ is strong.
8. If v is medium and $CD4+$ is medium then λ is medium.
9. If v is medium and $CD4+$ is high medium then λ is weak medium.
10. If v is medium and $CD4+$ is high then λ is weak.
11. If v is high and $CD4+$ is very low then λ is strong.
12. If v is high and $CD4+$ is low then λ is strong.
13. If v is high and $CD4+$ is medium then λ is medium.
14. If v is high and $CD4+$ is high medium then λ is medium.
15. If v is high and $CD4+$ is high then λ is medium.

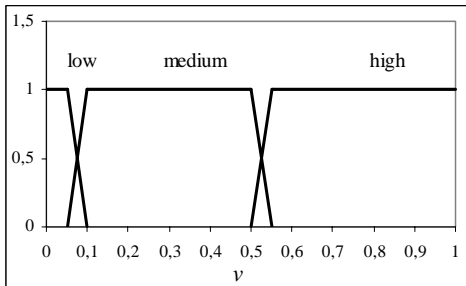


Figure 2: Membership functions viral load (v).

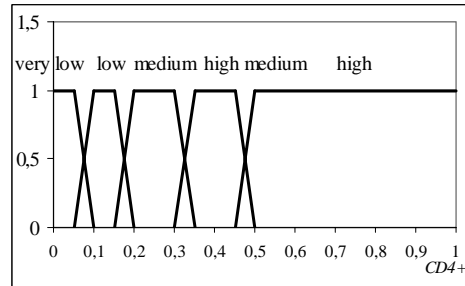
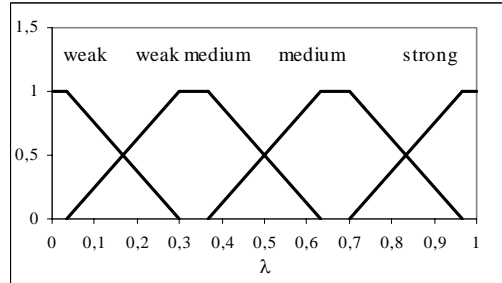
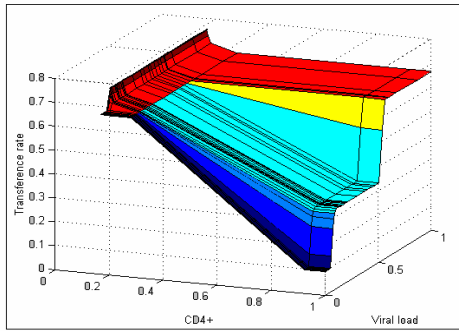
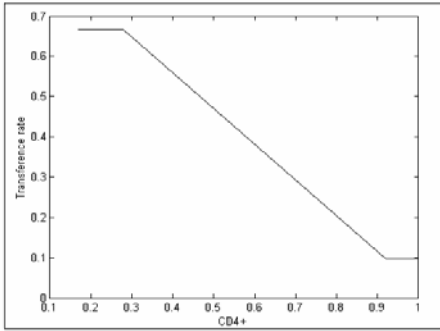


Figure 3: Membership functions $CD4+$ level.

Figure 4: Membership functions lambda (λ).

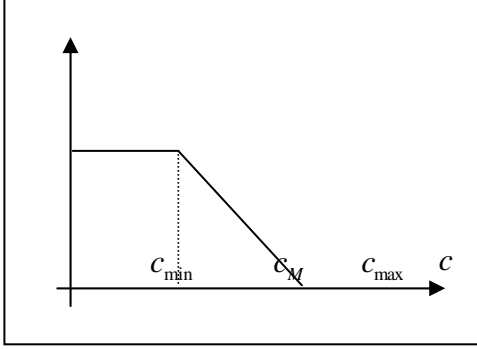
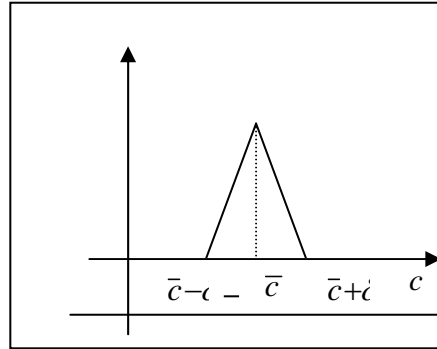
6. THE TRANSFERENCE RATE λ

From of the rules base introduced in the previous section and from the inference method adopted, we simulate the viral load v and the $CD4+$ level to a HIV-positive individual during sixty months and to obtain the output $\lambda = \lambda(v, CD4+)$ as depicted in figure 5. A cross-section of the λ surface along a parallel plan to the $CD4+$ level axis is shown in figure 6.

Figure 5: Function $\lambda = \lambda(v, CD4+)$.Figure 6: λ as a function of $CD4+$ ($v = 0.036$).

According with the section 4, $CD4+$ is the most useful parameter to control and to diagnose HIV. A more detailed study can be done assuming that the transference rate is $\lambda = \lambda(c)$, where $c = CD4+$ in the model (4). We assume λ given by the function of figure 6, that is, we assume $\lambda(c)$ as follows:

$$\lambda(c) = \begin{cases} 0 & \text{if } c < c_{\min} \\ \frac{c_M - c}{c_M - c_{\min}} & \text{if } c_{\min} \leq c \leq c_M \\ 1 & \text{if } c_M < c < c_{\max} \end{cases} \quad (5)$$

Figure 7: Transference rate λ in function of the $CD4+$.Figure 8: Membership function ρ adopted for C .

In the figure 7, c_{\min} represents the minimum $CD4+$ level for which the individual becomes symptomatic, c_M represents the $CD4+$ level for which the chance to become symptomatic is minimum, and c_{\max} is the largest quantity of $CD4+$ possible. In figure 6, we can observe the approximate values of c_{\min} and c_M , this is, c_{\min} is approximately 0.3 cells/ml and c_M is approximately 0.9 cells/ml. These values are compatible with the reality if $CD4+$ is less than 0.3 cells/ml the tendency is of the individual becomes symptomatic and when $CD4+$ is bigger than 0.9 cells/ml the tendency is of the individual to be asymptomatic. Thus, the number of asymptomatic and symptomatic individuals at the time instant t is:

$$x(t, c) = e^{-\lambda(v, CD4+)t} \quad y(t, c) = 1 - e^{-\lambda(v, CD4+)t}$$

7. FUZZY EXPECTANCY OF THE ASYMPTOMATIC INDIVIDUALS

The fuzzy expectancy is introduced here as a defuzzification method to provide an average value of $x(t) = e^{-\lambda(v, CD4+)t}$, the number of asymptomatic individuals at the time instant t . To define fuzzy expectancy we need first to define a fuzzy measure. Let Ω an unempty set and $P(\Omega)$ the subsets of Ω . The function $\mu: P(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ is a fuzzy measure [4] if:

1. $\mu(\emptyset) = 0$ and $\mu(\Omega) = 1$.
2. $\mu(A) \leq \mu(B)$ if $A \subseteq B$.

The value of the fuzzy expectancy of the asymptomatic individuals of the fuzzy set $x = x(t, c)$ is given by [8]

$$FEV[x] = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \inf[\alpha, \mu\{x \geq \alpha\}]$$

where $\{x \geq \alpha\} = \{c : x(c) \geq \alpha\}$ for each t and μ is a fuzzy measure. Let $H(\alpha) = \mu\{c : x(c) \geq \alpha\}$, for each $t > 0$. Here we suggest the following fuzzy

$$\text{measure: } \mu(A) = \begin{cases} \sup_{c \in A} \rho(c) & \text{if } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{if } A = \emptyset \end{cases}.$$

Let $A = [a, c_{\max}]$, where $a = c_M - (c_M - c_{\min}) \left(\frac{-\ln \alpha}{t} \right)$. Observe that

$c_{\min} < a \leq c_M$. Note that μ is an optimist measure, in the way that the $CD4+$ level in a group is evaluated for individual with $CD4+$ best level.

Beyond of $c \in [0, c_{\max}]$, we assume that the $CD4+$ level of the group HIV-positive studied (C) has different possibility to occur. We assume c as a triangular fuzzy set (see figure 8) given by:

$$\rho(c) = \begin{cases} 0 & \text{if } c \leq \bar{c} - \delta \\ \frac{1}{\delta}(c - \bar{c} + \delta) & \text{if } \bar{c} - \delta < c \leq \bar{c} \\ \frac{-1}{\delta}(c - \bar{c} - \delta) & \text{if } \bar{c} < c \leq \bar{c} + \delta \\ 0 & \text{if } c > \bar{c} + \delta \end{cases} \quad (6)$$

The parameter \bar{c} is the modal value and δ is the dispersion of each one the set fuzzy that defines the linguistic variable values. These fuzzy sets are defined from of the

values c_{\min} , c_M and c_{\max} of the definition of λ . Thus, we the fuzzy expectancy by looking at three cases:

1. **Case:** $CD4+$ low (C_-). We assume $c_{\min} > \bar{c} + \delta$. Thus, $FEV[x] = e^{-t}$.
2. **Case:** $CD4+$ high (C^+). We assume $c_M \leq \bar{c} - \delta$ and $\bar{c} + \delta \leq c_{\max}$. Thus, $FEV[x] = 1$.

3. **Case:** $CD4+$ medium (C_-^+). We assume $\bar{c} - \delta > c_{\min}$ and $\bar{c} + \delta < c_M$. The third case is the most interesting for our purposes because most part of the individuals is within this range. After a number of manipulations, we obtain:

$$H(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq \alpha \leq e^{-\lambda(\bar{c})t} \\ \rho(a) & \text{if } e^{-\lambda(\bar{c})t} < \alpha < e^{-\lambda(\bar{c}+\delta)t} \\ 0 & \text{if } e^{-\lambda(\bar{c}+\delta)t} \leq \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (7)$$

where $\rho(a) = \frac{1}{\delta} \left[-c_M - (c_M - c_{\min}) \left(\frac{\ln \alpha}{t} \right) + \bar{c} + \delta \right]$. As $H(\alpha)$ is continuous and decreasing, it has a unique fixed point that coincides with $FEV[x]$. Thus we obtain the following inequality:

$$e^{-\lambda(\bar{c})t} < FEV[x] < e^{-\lambda(\bar{c}+\delta)t}. \quad (8)$$

The inequality above shows that in the best hypothesis (μ optimist) is possible the $FEV[x]$ is less than 1, since it is inferior a possible solution $e^{-\lambda(\bar{c}+\delta)t}$.

This way, for each $t > 0$ there exists a unique $c(t) \in (\bar{c}, \bar{c} + \delta)$, where $c(t) = c_M + (c_M - c_{\min}) \left(\frac{\ln \alpha(t)}{t} \right)$. Thus, $FEV[x] = e^{-\lambda(c(t))t}$ is an exponential curve

and, because the $CD4+$ level increases with t , $FEV[x]$ is decreasing. Consequently, the fuzzy expectancy is not solution of (3). Actually, at each instant t , the $FEV[x]$ coincides with the unique solution of (3). It is easy to verify that $FEV[x]$ is differentiable and that it satisfies the following differential equation with the time dependent parameter λ :

$$\frac{dx}{dt} = - \left[\lambda(c(t)) + t \frac{d\lambda}{dt}(c(t)) \frac{dc}{dt}(t) \right] x \quad (9)$$

Note that for the three cases studied here, we obtain the following inequality:

$$e^{-FEV[\lambda]t} \leq e^{-\lambda(\bar{c})t} \leq FEV[x] \quad (10)$$

8. CONCLUSION

The main difference between the deterministic and the fuzzy model is that the fuzzy model allows imprecise parameters and defuzzification at any time. In deterministic modeling, defuzzification is done in the beginning of the mathematical modeling. We may state that the deterministic models are particular instances of fuzzy models. In our case, the deterministic model (3) results the solution $x(t) = e^{-\lambda(\bar{c})t}$. The fuzzy model also provides a unique curve $FEV[x]$ when decisions are necessary. Fuzzy expectancy of *asymptomatic* individuals is bounded below by $e^{-\lambda(\bar{c})t}$. Therefore, the fuzzy model over evaluates the number of *asymptomatic* individuals. We emphasize that, despite of using an optimist fuzzy measure to evaluate the $CD4+$ level in the population, the $FEV[x]$ is less than $e^{-\lambda(\bar{c}+\delta)t}$ and thus depends of the populational dispersion δ of the $CD4+$ level of the group studied. From (8), we see that when $\delta \rightarrow 0$, $FEV[x] \rightarrow e^{-\lambda(\bar{c})t}$ that is, it depends only of $CD4+$, indicating a policy for treatment. Clearly, the fuzzy model provides a clearer and meaningful characterization of parameter λ that is compatible with medical knowledge and perception.

9. REFERENCES

- [1] Barros, L.C., R.C. Bassanezi and M.B. Leite. The Epidemiological Models SI with Fuzzy Parameter of Transmission (submitted).
- [2] Krivan, V. and G. Colombo. A Non-Stochastic approach for Modeling Uncertainty in Population Dynamics. Bulletin of Mathematical Biology (1998) 60 .
- [3] Murray, J.D. 1990. Mathematical Biology. Springer-Verlag, Berlin.
- [4] Nguyen, H.T. and E.A.Walker. 2000. A First Course in Fuzzy Logic. Chapman & Hall/CRC.
- [5] Nowak, M.A . 1999. The Mathematical Biology of Human infections. Conservation Ecology 3 .

- [6] Ortega, N.S. 2001. Aplicação da Teoria de Lógica Fuzzy a Problemas da Biomedicina., PhD thesis., University of São Paulo (in Portuguese).
- [7] Pedrycz, W. and F.Gomide. 1998. An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design. Massachusetts Institute of Technology.
- [8] Sugeno, M. 1974. Theory of Fuzzy Integrals and Its Applications, PhD thesis, Tokyo Institute of Technology, Japan.
- [9] Zadeh, L.A . 1965. Fuzzy Sets. Information and Control 8: 338-353.

Modelos epidemiológicos com inclusão diferencial fuzzy

Laécio C. de Barros*, Rodney C. Bassanezi†
DMA-IMECC, UNICAMP - Campinas, SP;

Maria Beatriz F. Leite‡
PUCC - Campinas/SP;

Renata Zotin G.de Oliveira§
DM - IGCE - UNESP - Rio Claro, SP;

Resumo

Neste trabalho consideramos o modelo epidemiológico do tipo SI (suscetível-infectado) com heterogeneidade na classe dos infectados. Neste caso, a taxa de transmissão é considerada como conjunto fuzzy. A teoria de inclusão diferencial fuzzy é utilizada para produzir uma solução do modelo. Em seguida é feita uma comparação desta solução com aquela proposta pelo modelo determinístico.

1 Introdução

Os primeiros modelos matemáticos em Epidemiologia que levam em consideração a subdivisão da população de hospedeiros em suscetíveis e infectados

*laeciocb@ime.unicamp.br

†rodney@ime.unicamp.br

‡biaemiti@sigmabbs.com.br

§rzotin@rc.unesp.br

foram os de Kermack e McKendric. Estes modelos assumem que todos os indivíduos infecciosos têm a mesma chance de infectar. No entanto, sabe-se que um conjunto de fatores influenciam na ocorrência de uma nova infecção, dentre eles, a carga viral dos indivíduos infectados. Com a finalidade de se fazer análises mais detalhadas e obter informações sobre o controle da doença é comum considerar graus de infecciosidade na classe dos infectados e, subdividi-la em classes com n diferentes estágios infecciosos. Neste caso, a complexidade do modelo aumenta consideravelmente, dificultando a análise de certos parâmetros epidemiológicos(Leite et al (8)).

O tratamento matemático de incertezas graduais, como as que distinguem indivíduos numa população, tem-se utilizado cada vez mais da Teoria Fuzzy. Em Barros et al ((2)) a expectativa de vida de uma população é estudada a partir dos diferentes graus de pobreza de seus indivíduos. Já em Sadegh-Zadeh ((11)) os indivíduos são classificados baseando-se no seu estado de saúde, admitindo estágios intermediários entre saúde e doença.

Neste trabalho propomos um modelo em que a heterogeneidade dos indivíduos infectados é considerada sob a hipótese que eles infectam diferentemente, de acordo com sua carga viral, que é assumida ser limitada. Desta forma, o modelo matemático obtido passa a ser tipicamente aquele chamado de *ruido desconhecido mas limitado*, o qual é tratado matematicamente por meio das *inclusões diferenciais* (ver Krivan(7)). Para tornar o modelo mais realista, consideramos a taxa de contato como um conjunto fuzzy que depende da carga viral e, esta por sua vez, tem possibilidades distintas de ocorrência. Estas hipóteses adicionais nos levam as *inclusões diferenciais fuzzy* formalizadas por Hüllermeier ((6)). Por fim, comparamos o número médio de infectados com o número de indivíduos previsto pelo modelo determinístico, o qual é obtido supondo a homogeneidade na classe dos infectados, isto é, supondo que todos tenham mesma carga viral.

2 Preliminares

Um subconjunto fuzzy subset F de um conjunto universo \mathcal{U} é simbolicamente representado pela *função de pertinência* $u_F : \mathcal{U} \rightarrow [0, 1]$, onde $u_F(x)$ indica o grau de pertinência de x a F . Neste sentido podemos dizer que todo subconjunto(clássico) é um particular subconjunto fuzzy cuja função de

pertinência é sua função característica. Quando não houver dúvidas, representaremos o subconjunto fuzzy F apenas por sua função de pertinência u sem o índice.

Cada subconjunto fuzzy F é caracterizado seus α – *níveis* (ver Ralescu (10)).

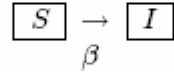
$$[F]^\alpha = \{x \in \mathcal{U} : u(x) \geq \alpha\}, \alpha \in (0, 1], \text{ e}$$

$$[F]^0 = \overline{\{x \in \mathcal{U} : u(x) > 0\}} \text{ é o suporte de } F.$$

Esta caracterização será usada principalmente para obter soluções dos sistemas dinâmicos fuzzy aqui em nosso texto.

3 O Modelo

O modelo matemático mais simples para descrever a dinâmica de doenças diretamente transmitidas com interação entre indivíduos suscetíveis e infectados, com ausência de imunidade, é o modelo SI sem dinâmica vital. O modelo pode ser representado pelo esquema compartimental:



onde S e I são as proporções de indivíduos suscetíveis e infectados, respectivamente, e β é o coeficiente de transmissão da doença. Este modelo, do ponto de vista determinístico, é descrito matematicamente pelo sistema de equações diferenciais não lineares,

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI \end{cases} \quad (1)$$

Considerando que a população total é constante, obtemos

$$\frac{dI}{dt} = \beta I(1 - I), \quad (2)$$

cuja solução é dada por

$$I(t) = \frac{I_0 e^{\beta t}}{S_0 + I_0 e^{\beta t}}, \quad (3)$$

onde S_0 e I_0 são as condições iniciais.

Na próxima seção vamos propor uma extensão do modelo (2), considerando a heterogeneidade individual. Admitiremos que diferentes cargas virais dos infecciosos contribuem diferentemente para a propagação da doença (ver Barros et al (3)).

3.1 Modelo Fuzzy

Ambos os conceitos de suscetibilidade e infecciosidade são incertos, isto é, há diferentes graus de suscetibilidade e infecciosidade entre os indivíduos de uma população. Tais diferenças podem surgir, por exemplo, quando consideramos grupos populacionais com seus diferentes hábitos e costumes, diferentes graus de resistência, etc. Visando incorporar a heterogeneidade populacional no modelo, consideraremos o parâmetro β (β que representa a chance de ocorrer a transmissão da doença quando há um contato entre um indivíduo suscetível e um infectado) como um *número fuzzy*. Assim, o domínio da função de pertinência β é o conjunto dos números reais e seus α – *níveis* são intervalos.

Assumimos aqui que a heterogeneidade populacional é dada apenas pela carga viral individual (ver Sadegh-Zadeh(11)). Vamos supor que, quanto maior a carga viral, maior a chance de transmitir a doença. Em outras palavras, assumimos que $\beta = \beta(v)$ mede a chance da transmissão ocorrer num contato entre um indivíduo suscetível e um indivíduo infectado com carga viral v .

Para obter a função grau de pertinência de β , assumimos que, quando a quantidade de vírus no indivíduo é relativamente baixa, a chance de transmissão é negligenciável, e existe uma quantidade mínima de vírus ν_{\min} necessária para provocar a transmissão da doença. Além disso, a partir de uma certa quantidade de vírus ν_M , a chance de transmissão da doença é máxima e igual a 1. Finalmente, supomos que a quantidade individual de vírus é sempre limitada por ν_{\max} para cada doença. Escolhemos a seguinte função de

pertinência para β (ver (3))

$$\beta(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{se } \nu < \nu_{\min} \\ \frac{\nu - \nu_{\min}}{\nu_M - \nu_{\min}} & \text{se } \nu_{\min} \leq \nu \leq \nu_M \\ 1 & \text{se } \nu_M < \nu < \nu_{\max}. \end{cases} \quad (4)$$

A quantidade mínima de vírus necessária para que ocorra transmissão, ν_{\min} , é caracterizada pela suscetibilidade do grupo estudado.

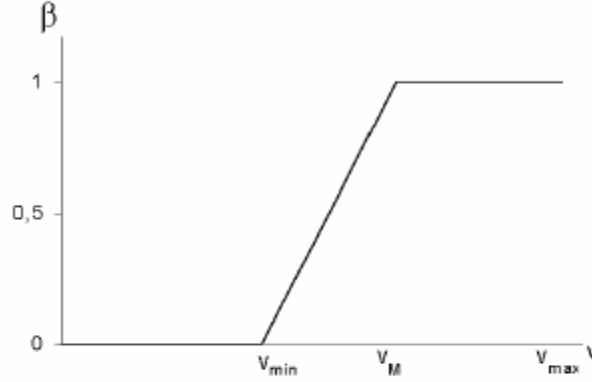


Figura 1: Coeficiente fuzzy de transmissão β

3.2 Análise do número de indivíduos infectados para o modelo fuzzy

Sendo β um conjunto fuzzy, é de se esperar que o número de indivíduos infectados, em cada instante, seja um conjunto fuzzy.

Até aqui a incerteza no modelo fuzzy é devido o parâmetro v . Não sabemos o valor de v , porém sabemos que $v \in [0, v_{\max}]$. Para obter o número de indivíduos infectados, em cada instante, como um conjunto fuzzy vamos fazer uso da teoria de inclusões diferenciais. Krivan((7)) sugere a substituição da equação (2) pela *inclusão diferencial parametrizada*

$$\frac{dI}{dt} \in \{\beta(v)I(1 - I), v \in [0, v_{\max}]\}, \quad (5)$$

cuja solução é formada pela coleção de todas as soluções de (2), onde $v(t) \in [0, v_{\max}]$ é uma função mensurável (ver Krivan (7) e Aubin and Cellina (1)). Desta forma (5) é um caso típico do chamado *ruído desconhecido mas limitado*, o qual deve ser estudado através do seguinte sistema de controle

$$\frac{dI}{dt} = \beta(v)I(1 - I), I(0) = I_0, v(t) \in [0, v_{\max}]. \quad (6)$$

O conjunto de todas as soluções da inclusão diferencial (5) coincide com o conjunto de todas as soluções de sistemas de controle (6). Contudo, o conjunto atingível de (5) no instante $t > 0$, definido por, $R(t) = \{I(t) : I \text{ é solução de } 5\}$, é um intervalo (ver Aubin e Cellina (1)). Para nosso caso, este conjunto atingível é dado por

$$R(t) = [I_-, I_+]$$

onde $I_+(t)$ e $I_-(t)$ são, respectivamente, as soluções de

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \max\{\beta(v)I(1 - I), v \in [0, v_{\max}]\}, I_0 \\ \frac{dI}{dt} &= \min\{\beta(v)I(1 - I), v \in [0, v_{\max}]\}, I_0. \end{aligned}$$

ou

$$\frac{dI}{dt} = I(1 - I) \text{ e } \frac{dI}{dt} = 0, I(0) = I_0.$$

Assim, $I_+(t) = \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t}$ e $I_-(t) = I_0$. Portanto

$$R(t) = [I_0, \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t}].$$

Da hipótese que β é um conjunto fuzzy, isto é, uma função de pertinência de algum subconjunto fuzzy com domínio nos valores assumidos pela carga viral, Hüllermeier ((6)) propõe que a inclusão 5 passe a ser vista como uma inclusão diferencial fuzzy parametrizada por v , cuja solução é, em cada instante t , um conjunto fuzzy $I(t)$, cujos α -níveis, $[I(t)]^\alpha$, são dados pelos conjuntos atingíveis $R^\alpha(t)$ da inclusão diferencial

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} \in \{\beta(v)I(1 - I), v \in [\beta]^\alpha\} \\ I(0) = I_0 \end{cases} \quad (7)$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} \in \{\beta(v)I(1-I); v \in [\alpha(v_M - v_{\min}) + v_{\min}, v_{\max}]\} \\ I(0) = I_0. \end{cases} \quad (8)$$

Da mesma forma que obtemos $R(t)$ acima, podemos concluir que

$$\begin{aligned} R^\alpha(t) &= \left[\frac{I_0 e^{\beta(\alpha(v_M - v_{\min}) + v_{\min})t}}{S_0 + I_0 e^{\beta(\alpha(v_M - v_{\min}) + v_{\min})t}}, \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t} \right] \\ &= \left[\frac{I_0 e^{\alpha t}}{S_0 + I_0 e^{\alpha t}}, \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t} \right], \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Note que $R(t) = R^0(t)$.

Assim, em cada instante t , $I(t)$ é um conjunto fuzzy onde os α -níveis são dados por $R^\alpha(t)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Vale a pena lembrar que os intervalos $R^\alpha(t)$ obtidos acima definem, de fato, um conjunto fuzzy (ver Diamond(4)).

A função de pertinência de $I(t)$ é obtida por (ver Ralescu (10))

$$u_{I(t)}(I) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \{\alpha \in [0, 1] : I \in R^\alpha(t)\} = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{S_0}{I_0} \frac{I}{1-I}\right).$$

É interessante notar que, neste caso, as trajetórias no nível $\alpha = 1$, que é formado apenas pela curva

$$\frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t} = [I(t)]^1,$$

não têm qualquer preferência sobre outras, ou seja, o fato de estar no nível $\alpha = 1$, que está contido nos demais $[I(t)]^\alpha$, não indica que esta trajetória tenha mais chance de ocorrer que outras. Esta observação é consequência direta do fato que β é função de pertinência, mas o número $\beta(v) \in [0, 1]$ não indica possibilidade de v ocorrer. $\beta(v)$ não é função de possibilidade. Este fato implica a ausência de critério para a escolha de uma trajetória (seleção), de maneira natural, na solução fuzzy de Hulermeier com α -níveis dada por (9).

A hipótese adicional a seguir nos ajudará na escolha de critérios para selecionar trajetórias na solução fuzzy. Tal trajetória terá as características da

trajetória baricêntrica, que corresponde ao número médio de indivíduos infectados em cada instante t .

Para tornar o modelo mais realista vamos supor que v tenha diferentes chances de ocorrer. Como consequência vamos propor um critério natural para escolher uma trajetória na solução (9). Mais especificamente usaremos a esperança, $E[I(t)]$, como o defuzzificador do número de indivíduos infectados $I(t)$.

3.3 Esperança do número de indivíduos infectados

Como mencionamos antes vamos supor que a possibilidade de v ocorrer seja dada pelo número $\rho(v) \in [0, 1]$.

Assim, $\rho(v)$ pode ser visto como a possibilidade para a carga viral $V = v$. Consideramos que $\rho(v)$ é dado por

$$\rho(v) = \begin{cases} 1 - \frac{|v - \bar{v}|}{\delta} & \text{se } v \in [\bar{v} - \delta, \bar{v} + \delta] \\ 0 & \text{se } v \notin [\bar{v} - \delta, \bar{v} + \delta]. \end{cases} \quad (10)$$

O parâmetro \bar{v} é o valor central e δ dá a dispersão da carga viral. Note que $\rho(v)$ é um típico número fuzzy triangular ((9)).

A Figura 2 mostra o gráfico de $\rho(v)$

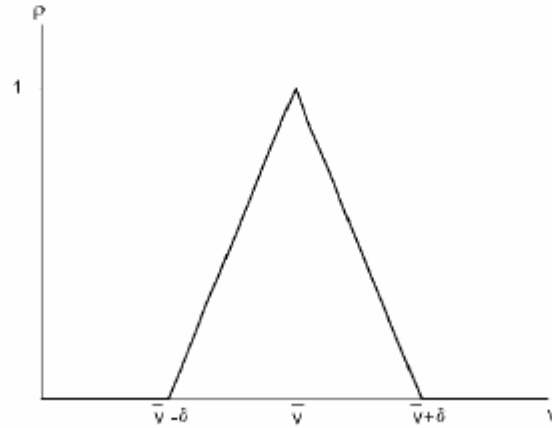


Figura 2: Distribuição da carga viral ρ

Adotaremos aqui a *medida de probabilidade* $\mu(A) = \int_A \frac{\rho(\nu)}{\delta}$, para todo $A \subset R$, e como defuzzificador, a esperança de $I(t)$

$$E[I(t)] = \int_R I(t) \frac{\rho(\nu)}{\delta} d\nu = \frac{1}{\delta} \int_{\bar{v}-\delta}^{\bar{v}+\delta} I(v, t) \rho(\nu) d\nu,$$

onde $I(v, t) = \frac{I_0 e^{\beta(v)t}}{S_0 + I_0 e^{\beta(v)t}}$.
Observamos que

se $\bar{v} + \delta < v_{\min}$ (carga viral fraca) temos $E[I(t)] = I_0, \forall t > 0$,

se $\bar{v} - \delta > v_M$ (carga viral forte) temos $E[I(t)] = \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t}, \forall t > 0$.

De maneira geral temos

$$I(\bar{v} - \delta, t) \leq E[I(v, t)] \leq I(\bar{v} + \delta, t).$$

Assim, $E[I(v, t)] \in R(t)$, onde $R(t)$ é o conjunto atingível de (5). Como $R(t)$ é um intervalo, existe um único $v = v(t) \in [\bar{v} - \delta, \bar{v} + \delta]$, para o qual tem-se

$$I(v(t), t) = E[I(v, t)].$$

Desta forma, se representássemos o fenômeno através de uma única curva, $E[I(v, t)]$ seria a candidata, visto que representa uma média ponderada por $\rho(v)$ para cada $t > 0$. Entretanto, tal curva não é a solução do modelo inicial (2), visto que $E[I(v, t)] = I(v(t), t)$ com $v(t)$ não constante.

O modelo determinístico(sem incerteza) indica que seja adotado o valor \bar{v} para a carga viral e, neste caso, o número de indivíduos infectados segue a trajetória

$$I(\bar{v}, t) = \frac{I_0 e^{\beta(\bar{v})t}}{S_0 + I_0 e^{\beta(\bar{v})t}},$$

cujas pertinência na solução fuzzy (9) é

$$u_{I(t)}(I(\bar{v}, t)) = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{S_0}{I_0} \frac{I(\bar{v}, t)}{1 - I(\bar{v}, t)}\right) = \beta(\bar{v}), \text{ para todo } t > 0.$$

Desta forma podemos afirmar que a solução determinística é uma das que tem maior possibilidade(é preferida) de ocorrer uma vez que \bar{v} é a carga viral com maior chance de ocorrência.

3.4 Políticas de controle da epidemia

Em Barros et al ((3)) é mostrado que

se $S_0 > I_0$, e enquanto $t \leq \ln \frac{S_0}{I_0}$, então $E[I(v, t)] > I(\bar{v}, t)$. A partir de $t = \ln \frac{S_0}{I_0}$, haverá um instante \bar{t} para o qual $E[I(v, t)] = I(\bar{v}, t)$. Daí em diante (para $t > \bar{t}$), $E[I(v, t)] < I(\bar{v}, t)$. Indicando que o modelo determinístico sub-avalia o número médio de indivíduos infectados no início e super-avalia no fim

se $S_0 \leq I_0$ então $E[I(v, t)] \leq I(\bar{v}, t), \forall t > 0$, o modelo determinístico super-avalia o número médio de indivíduos infectados.

Portanto, para o início da epidemia ($t < \ln \frac{S_0}{I_0}$) e $S_0 \gg I_0$, temos

$$I(\bar{v}, t) \leq E[I(v, t)] \leq I(\bar{v} + \delta, t).$$

Logo, $v(t) \in [\bar{v}, \bar{v} + \delta]$. Agora, já que $E[I(v, t)] = I(v(t), t)$, cresce com o aumento de $v(t)$, podemos dizer que:

quanto maior \bar{v} , maior $E[I(v, t)]$; quanto maior δ , maior $E[I(v, t)]$ e quanto maior v_{\min} , maior $E[I(v, t)]$.

Assim, é possível interferir na evolução da doença de duas formas:

1) Aumentando o valor de ν_{\min} . Isto é uma consequência de um aumento na resistência dos indivíduos suscetíveis (diminuindo sua suscetibilidade) que poderia ser feito, por exemplo, através de vacinação, medidas de saneamento, etc. indicando que o parâmetro ν_{\min} está relacionado com a população de indivíduos suscetíveis.

2) A outra opção é reduzir $E[I(v, t)]$ através da redução de δ . A redução de δ poderia ser feita através de políticas de controle relacionadas à população de infectados, por exemplo, isolamento. A redução de $\bar{\nu}$ está relacionada ao tratamento, como, por exemplo, utilização de medicamentos.

As situações acima mostram duas possibilidades de estratégias de controle:

1) indica uma ação em toda a população e 2) age diretamente na população de indivíduos infectados. Obviamente, uma combinação de ambas teria uma eficiência melhor na prevenção e controle da doença.

Referências

- [1] Aubin, J. P.; Cellina, A. - Differential Inclusions- set-valued maps and viability theory, Springer-Verlag, 1984.
- [2] Barros, L.C.; Bassanezi, R. C. - A simple model of life expectancy with subjective parameters - *Kybernetes* (1995), vol. 24 n° 7, 91-98.
- [3] Barros, L.C. ; Bassanezi, R.C. ; Leite, M.B.F. The epidemiological models SI with fuzzy parameter of transmission. (submetido).
- [4] Diamond, P. - Time-dependent differential inclusions, cocycle attractors and fuzzy differential equations - *IEEE trans. Fuzzy Systems* 7 (1999) 734-740.
- [5] Edelstein-Keshet, L. (1988). Mathematical Models in Biology. In: **Birkhäuser Mathematics Series**. McGraw-Hill Inc., New York, St. Louis, San Francisco.
- [6] Hüllermeier, E. - An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical systems - *Intern. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge-Based Systems*, 5(1997) 117-137.
- [7] Krivan, V. and G. Colombo, A Non-Stochastic approach for Modeling Uncertainty in Population Dynamics. *Bulletin of Mathematical Biology*, 60 (1998).
- [8] Leite, M.B.F., Bassanezi, R.B.; Yang, H.M. - "The basic reproduction for a model of directly transmitted infections considering the virus charge and the immunological response ". *IMA Journal of Mathematics Applied in Medicine an Biology* (2000), 17, 15-31.
- [9] Nguyen, H.T.;Walker, E.A. *AFirst Course in Fuzzy Logic*, CRC Press, Inc.-1997.
- [10] Puri, M.L. e Ralescu, D.A. - Differentials of fuzzy functions - *Jour. Math. Analysis and Applications*, 91(1983) 552-558.
- [11] Sadegh-Zadeh, K. - Fundamentals of clinical methodology: 3. Nosology - *Artificial Intelligence in Medicine* 17 (1999) 87-108.

Dinâmica da transmissão da dengue e delineamento de mecanismos de controle e prevenção

Hyun Mo Yang*
UNICAMP/IMECC-DMA

1 Introdução

A dengue é, atualmente, um importante problema de saúde pública. Nas duas últimas décadas, houve agravamento da sua situação epidemiológica devido à expansão geográfica da distribuição do vetor e do vírus, aumentando a frequência de epidemias e o desenvolvimento de endemicidade e emergência de dengue hemorrágica em novas áreas. No Brasil, a transmissão da dengue tem sido registrada anualmente desde 1986, com crescente expansão da sua área de ocorrência, atingindo no ano de 1998 a cifra de 537.507 casos distribuídos em 24 Estados, sendo que em 9 destes foi constatada a ocorrência de 98 casos de dengue hemorrágico (Ministério da Saúde). No Estado de São Paulo, neste mesmo ano, foram computados 10.629 casos em 102 Municípios, a despeito do crescente envolvimento do poder público municipal e da população no controle do mosquito vetor, o *Aedes aegypti*, única forma de controle da dengue, uma vez que a vacina ainda não está disponível.

Para estudar a epidemia da dengue, desenvolve-se modelos matemáticos para descrever a dinâmica da transmissão da dengue, lembrando que o controle é feito somente no vetor transmissor da doença. Por este motivo, divide-se o desenvolvimento de modelos em duas partes: primeiro, estuda-se população

*hyunyang@ime.unicamp.br

de mosquitos e os efeitos da introdução de várias formas de controle; posteriormente, acopla-se à dinâmica do vetor a transmissão da dengue na população humana.

2 Dinâmica da População de Mosquitos Vetor

O vírus da dengue é transmitido biologicamente entre o hospedeiro humano e o vetor mosquito, ou seja, a transmissão da dengue envolve um vírus e duas populações. As vacinas ainda estão em estudo, tendo como consequência o controle da doença restrita à população de mosquitos.

Inicialmente, estuda-se modelos da dinâmica de população de mosquitos, com o objetivo de determinar os efeitos de diferentes mecanismos de controle atuando no vetor.

Primeiro, apresenta-se as variáveis de quantificação do fenômeno biológico, levando-se em consideração o ciclo de vida do vetor *Aedes aegypti*, porém sem considerar os mecanismos de controle, que serão apresentados a seguir.

1. Fase ovo. O número de ovos E em cada instante de tempo t será representado por $E(t)$. A quantidade de ovos aumenta dependente da taxa de oviposição das fêmeas e do número de criadouros disponíveis, e diminui conforme a eclosão destes em larvas, e da taxa com que eles tornam inviáveis. As taxas per-capitas de oviposição (por fêmea adulta), de eclosão para a fase larva e de se tornarem inviáveis são designadas por ϕ , σ_e e μ_e , respectivamente. Note que tem-se $\sigma_e = \tau_e^{-1}$, onde τ_e é o período médio de eclosão de ovos. A capacidade total de criadouros será designada por C , que será o fator limitante para oviposição. Dessa forma, a taxa efetiva de produção total de ovos por todas as fêmeas adultas será dada por $\varphi(W) \left(1 - \frac{E}{C}\right)$, pois $\varphi(W)$, que depende da taxa per-capita de oviposição ϕ , é a capacidade de produção de ovos de todas as fêmeas e $\left(1 - \frac{E}{C}\right)$ é a disponibilidade de criadouros para receber os ovos, uma vez que os ovos competem por criadouros. Os criadouros têm influência na dinâmica do vetor diferenciados, dependendo da sua natureza. Por exemplo, as caixas de água são criadouros muito mais potentes do que os vasos de plantas, garrafas plásticas e outros recipientes deste porte, e, estes, por sua vez, são muito mais potentes que outros

menores como tampinhas de garrafa. Assim, a capacidade total é dada por $C = \sum_{i=1}^k C_i$, onde $i = 1, 2, \dots, k$, para k tipos estratificados de criadouros.

2. Fase larva. O número de larvas L em cada instante de tempo t será representado por $L(t)$. A quantidade de larvas aumenta dependente da taxa de eclosão de ovos, e diminui conforme a transformação destas em pupas, e da taxa com que elas morrem. As taxas per-capitas de transformação para a fase pupa e de mortalidade são designadas por σ_l e μ_l , respectivamente. Note que tem-se $\sigma_l = \tau_l^{-1}$, onde τ_l é o período médio de transformação de larvas em pupas.
3. Fase pupa. O número de pupas P em cada instante de tempo t será representado por $P(t)$. A quantidade de pupas aumenta dependente da taxa de transformação de larvas, e diminui conforme a eclosão (ou emergência) destes em mosquitos adultos, e da taxa com que elas morrem. As taxas per-capitas de eclosão para a fase adulta e de mortalidade são designadas por σ_p e μ_p , respectivamente. Note que tem-se $\sigma_p = \tau_p^{-1}$, onde τ_p é o período médio de eclosão de pupas.
4. Fase adulta. O número de mosquitos adultos (ou alados) fêmeas W em cada instante de tempo t será representado por $W(t)$. A quantidade de mosquitos adultos aumenta dependente da taxa de eclosão (ou emergência) de pupas, e diminui conforme a taxa com que eles morrem. A taxa per-capita de mortalidade (de fêmeas) é designada por μ_w . Note que está-se tratando de mosquitos fêmeas.

Em relação aos mecanismos de controle, estes podem agir em qualquer uma das quatro fases do vetor: ovo, larva, pupa e adulto. Apresenta-se os mecanismos de combate ao mosquito em uso pelas autoridades sanitárias (como SUCEN, Superintendência de Controle de Endemias).

1. Controle mecânico. Este controle deve ser feito pelos agentes de saúde pública no momento da visita e pelos moradores continuamente, portanto, necessita de participação popular, consistindo na remoção ou inviabilização de criadouros. Quando se retira criadouros, no caso de conterem uma das fases aquáticas do mosquito, está-se eliminando todas

as três fases aquáticas (ovo, larva e pupa). Uma outra hipótese é a de que a eliminação de criadouros seja efetiva, isto é, não há reposição dos criadouros removidos. Assim, o impacto deste controle mecânico pode ser em dois níveis. Primeiro, há eliminação de fração f_i , $i = 1, 2, \dots, k$, de cada tipo estratificado de criadouros, sendo o total de criadouros removidos dado por $\sum_{i=1}^k f_i C_i$, portanto a capacidade remanescente fica $C' = \sum_{i=1}^k (1 - f_i) C_i$. Por outro lado, esta remoção está eliminando também ovos, larvas e pupas presentes em recipientes positivos para fases aquosas do vetor, assim assume-se que ocorra uma inviabilização adicional a taxas per-capitas m_e , m_l e m_p , onde m_e , m_l e m_p são as taxas adicionais de mortalidade de ovos, larvas e pupas, respectivamente.

2. Controle químico larvicida. O impacto do controle de larvas por produtos químicos de longa duração pode ser medido pela morte de larvas. Assume-se que este tipo de controle induza a uma mortalidade adicional tanto para larvas quanto para pupas. Assim, as mortalidades adicionais pelo uso de produtos químicos podem ser dadas por μ'_l e μ'_p , onde μ'_l e μ'_p são, respectivamente, taxas adicionais de mortalidade de larvas e de pupas.
3. Controle químico adulticida. Existem duas formas de controle químico de adultos. Pelo uso de equipamentos portáteis de aplicação de inseticidas (dentro das casas) e pelo uso de equipamentos pesados (pulverização nas ruas), este último descartado, exceto em casos de emergência (epidemias de dengue). O efeito da ação de inseticida é induzir a mortalidade de adultos. Dessa forma, considera-se um acréscimo na mortalidade dado por μ'_w , onde μ'_w é a taxa de mortalidade adicional de mosquitos adultos.

Em relação às mortalidades naturais μ_e , μ_l , μ_p e μ_w , pode-se identificar estas taxas com os períodos de sobrevivência (ou vida média) nas fases ovo, larva, pupa e mosquito adulto fêmea, respectivamente, pelas variáveis μ_e^{-1} , μ_l^{-1} , μ_p^{-1} e μ_w^{-1} . Em relação às mortalidades devidas aos mecanismos de controle m_e , m_l e m_p (mecânico), μ'_l e μ'_p (larvicida) e μ'_w (inseticida), elas são mortalidades adicionais em cada uma das fases em que atuam.

O balanceamento dos fluxos entre as quatro fases descreve a dinâmica da população de mosquitos. Usando-se equações diferenciais ordinárias para

equacionar os fluxos, tem-se modelo determinístico compartimental, onde os compartimentos representam as quatro fases não-interceptantes e excludentes do ciclo vital do mosquito.

Portanto, a dinâmica da população de mosquitos, na presença dos três mecanismos de controle do vetor, pode ser descrita por

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}E(t) &= \varphi(W) \left[1 - \frac{E(t)}{C}\right] - \rho_e E(t) \\ \frac{d}{dt}L(t) &= \sigma_e E(t) - \rho_l L(t) \\ \frac{d}{dt}P(t) &= \sigma_l L(t) - \rho_p P(t) \\ \frac{d}{dt}W(t) &= \sigma_p P(t) - \rho_w W(t), \end{cases} \quad (1)$$

onde as taxas de saídas de fases ovo, larva, pupa e mosquito adulto são dadas, respectivamente, por ρ_e , ρ_l , ρ_p e ρ_w , dadas por

$$\begin{cases} \rho_e = \sigma_e + \mu_e + m_e \\ \rho_l = \sigma_l + \mu_l + \mu'_l + m_l \\ \rho_p = \sigma_p + \mu_p + \mu'_p + m_p \\ \rho_w = \mu_w + \mu'_w. \end{cases} \quad (2)$$

Note que estas taxas de saída são tais que o inverso é o período médio de permanência em cada fase. Por exemplo, ρ_e^{-1} é o período médio de permanência na fase ovo, quando as saídas são a eclosão dos ovos (σ_e), a inviabilidade dos ovos (μ_e) e a remoção dos ovos por controle mecânico (m_e). Todos os parâmetros do modelo foram previamente definidos. Observe que a taxa efetiva de oviposição depende da fertilidade das fêmeas (dada pela taxa per-capita ϕ), e, também, da disponibilidade de criadouros (dada pelo número de criadouros ou capacidade do meio C). Assim, quanto maior a oferta de criadouros, maior será a capacidade de infestação do mosquito. Por outro lado, a função $\varphi(W)$ descreve a dependência da oviposição por parte das fêmeas adultas com a disponibilidade de criadouros e do número de mosquitos.

Observe que os parâmetros ϕ , σ_e , σ_l , σ_p , μ_e , μ_l e μ_p , com exceção de C , dependem fortemente do meio-ambiente, ou seja, da temperatura, da umidade e dos fatores climáticos. Porém o parâmetro C depende das condições social, demográfica e econômica de uma comunidade, uma vez que este mosquito tem habitat exclusivamente urbano.

O estudo da ação isolada de cada um dos mecanismos de controle é feito anulando o efeito dos demais mecanismos de controle. Os efeitos do controle

mecânico atuando isoladamente podem ser estudados pela diminuição de capacidade de meio, onde o número remanescente de criadouros disponíveis é dado por C' , e pela mortalidade adicional dos ovos, larvas e pupas, dadas por m_e , m_l e m_p . Os outros efeitos são anulados, ou seja, faz-se $\mu'_l = \mu'_p = \mu'_w = 0$. Por outro lado, os efeitos de larvicida podem ser estudados pelos parâmetros μ'_l e μ'_p , fazendo-se $f_i = 0$, para todo i , e $m_e = m_l = m_p = \mu'_w = 0$. Finalmente, os efeitos de inseticida são medidos pelo parâmetro μ'_w , fazendo-se $f_i = 0$, para todo i , e $m_e = m_l = m_p = \mu'_l = \mu'_p = 0$.

Três tipos de dinâmica da população de mosquitos são estudados, variando, para tanto, a capacidade de oviposição das fêmeas dada por $\varphi(W)$.

2.1 Capacidade de Oviposição e Controle Intrínseco

A capacidade de oviposição das fêmeas $\varphi(W)$ pode atuar no sentido de controlar intrinsecamente o tamanho da população de mosquitos. Para tanto, escolhe-se a função do tipo

$$\varphi(W) = \phi\sqrt{W} \quad (3)$$

dentre as classes de funções que exibem um comportamento dinâmico similar representadas por $\varphi(W) = \phi W^n$, $0 \leq n < 1$. Note que para $n = 0$ tem-se um sistema dinâmico linear, cuja única solução não-trivial é estável.

Esta classe de funções descreve uma população que consegue evitar os dois extremos desfavoráveis, que são a extinção e a explosão populacional. Isto pode ser observado re-escrevendo a equação (3) como $\varphi(W) = \varphi'(W)W$, onde $\varphi'(W)$ é a taxa de oviposição per-capita dada por

$$\varphi'(W) = \frac{\phi}{\sqrt{W}}.$$

Note que a capacidade efetiva de oviposição aumenta com diminuição do número de mosquitos adultos, enquanto que diminui com o aumento.

Analisa-se este modelo dinâmico substituindo-se a função dada pela equação (3) no sistema de equações (1). Em relação aos pontos de equilíbrio, obtém-se sempre três pontos.

O equilíbrio trivial é dado pelos valores $E = 0$, $L = 0$, $P = 0$ e $W = 0$. Esta é a situação em que uma comunidade humana está livre de infestação de mosquitos.

Os outros dois pontos de equilíbrio não-triviais são obtidos da equação de segundo grau para o número de mosquitos adultos fêmeas W dada por

$$W^2 - \left[2QC' + \left(\frac{QC'}{Q_0} \right)^2 \right] W + (QC')^2 = 0, \quad (4)$$

onde Q e Q_0 são dados por

$$\begin{cases} Q &= \frac{\sigma_p}{\rho_p} \frac{\sigma_l}{\rho_l} \frac{\sigma_e}{\rho_w} \\ Q_0 &= \frac{\phi}{\phi_{th}}, \end{cases} \quad (5)$$

com ϕ_{th} , a taxa de oviposição per-capita limiar, sendo dada por

$$\phi_{th} = \left(\frac{Q}{\rho_e} \right)^{-1} = \left(\frac{\sigma_e}{\rho_e} \frac{\sigma_l}{\rho_l} \frac{\sigma_p}{\rho_p} \frac{1}{\rho_w} \right)^{-1}. \quad (6)$$

Esta equação de segundo grau sempre tem duas soluções reais positivas não-nulas. Os valores das outras fases do ciclo de vida do vetor são dados por

$$\begin{cases} E &= \frac{W}{Q} \\ L &= \frac{\rho_p}{\sigma_p} \frac{\rho_w}{\sigma_l} W \\ P &= \frac{\rho_w}{\sigma_p} W, \end{cases} \quad (7)$$

que dependem da solução para equação de segundo para W .

As duas soluções para a equação (4) são

$$\begin{cases} W_+ &= QC' \left[1 + \frac{QC'}{2Q_0^2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{QC'}{Q_0^2} \left(4 + \frac{QC'}{Q_0^2} \right)} \right] \\ W_- &= QC' \left[1 + \frac{QC'}{2Q_0^2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{QC'}{Q_0^2} \left(4 + \frac{QC'}{Q_0^2} \right)} \right], \end{cases} \quad (8)$$

onde W_+ e W_- são valores, respectivamente, maior e menor das duas soluções positivas.

O parâmetro Q_0 , re-escrito como produto de quatro termos

$$Q_0 = \frac{\sigma_e}{\rho_e} \times \frac{\sigma_l}{\rho_l} \times \frac{\sigma_p}{\rho_p} \times \frac{\phi}{\rho_w}, \quad (9)$$

tem a seguinte interpretação biológica. Observe que os três primeiros termos do produto é a divisão entre ρ_{\bullet}^{-1} e σ_{\bullet}^{-1} para as fases ovo, larva e pupa. Note que σ_{\bullet}^{-1} é o período que permanece em uma certa fase aquática até passar para fase seguinte, enquanto ρ_{\bullet}^{-1} é o período de sobrevivência (mudança de fase do ciclo vital, de mortalidade natural e mecanismos de controle) em uma certa fase aquática. Assim, σ_e/ρ_e , por exemplo, é a probabilidade de um ovo sobreviver durante toda a fase do ovo e eclodir para a fase larva, e o mesmo vale para outras duas razões. Em relação ao último termo, ρ_w^{-1} é o período de sobrevivência do mosquito adulto fêmea e ϕ é a taxa per-capita efetiva de oviposição; logo ϕ/ρ_w é o número médio de ovos que uma fêmea produz durante todo o período de sua vida. Logo Q_0 é a probabilidade de um ovo sobreviver na fase ovo e eclodir para larva, e esta larva sobreviver na fase larva e passar para a fase pupa, e esta pupa sobreviver a fase pupa e eclodir para fase adulta, e, então, este mosquito fêmea ovipor durante toda a fase alada. Assim, Q_0 mede número médio de descendentes fêmeas viáveis que um mosquito adulto fêmea produz durante todo o seu período fértil. Assim, quanto maior este valor, maior será a infestação por mosquitos adultos.

A equação do segundo grau para W dada pela equação (4) tem os seguintes valores limites em relação à capacidade remanescente C' . Para $C' = 0$ tem-se um único ponto de equilíbrio dado pelo equilíbrio trivial, pois as duas soluções da equação (8) são $W_+ = W_- = 0$. No outro extremo, para $C' \rightarrow \infty$, tem-se três pontos de equilíbrio: o equilíbrio trivial, o equilíbrio não-trivial finito dado pelo valor $W_- = Q_0^2$ e o equilíbrio infinito $W_+ \rightarrow \infty$. Porém, impondo $C' \rightarrow \infty$ no sistema de equações (1), e resolvendo, tem-se dois pontos de equilíbrio: o equilíbrio trivial, e o equilíbrio não-trivial dado pelo valor $W = Q_0^2$, que corresponde a W_- , e o valor de W_+ não aparece.

A análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio é restrita para o caso $C' \rightarrow \infty$. Para C' finito, a estabilidade dos pontos de equilíbrio não-triviais é feita numericamente. A estabilidade de um ponto de equilíbrio é dada pelo critério de Routh-Hurwitz, que estabelece a sua estabilidade através do valor negativo para a parte real de todos os auto-valores. Uma conjectura deste critério para modelos epidemiológicos tipo bilineares estabelece que se o termo independente da equação característica for positivo, então o ponto de equilíbrio é estável (1).

O ponto de equilíbrio trivial, por causa do termo \sqrt{W} , não é possível

utilizar linearização do sistema em torno de equilíbrio. Assim, olhando para a primeira equação do sistema (1) com $\varphi(W) = \phi\sqrt{W}$, verifica-se que este termo sobressai sobre demais para valores pequenos para todas as fases. Assim, o ponto de equilíbrio trivial é globalmente instável.

O ponto de equilíbrio não-trivial dado por $W = Q_0^2$, e demais valores obtidos da equação (7), tem a análise de sua estabilidade dada pela linearização em torno de equilíbrio. A matriz Jacobiana correspondente ao sistema de equações (1) com a equação (3), dada por

$$J = \begin{bmatrix} -\rho_e & 0 & 0 & \frac{\phi}{2\sqrt{W}} \\ \sigma_e & -\rho_l & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_l & -\rho_p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_p & -\rho_w \end{bmatrix},$$

calculada no ponto de equilíbrio, tem os auto-valores associados λ obtidos da solução da equação característica $\Lambda(\lambda)$ definida por

$$\Lambda(\lambda) = \det(J - \lambda I),$$

onde \det é determinante da matriz e I é a matriz identidade 4×4 . A equação característica pode ser re-escrita como

$$\Lambda(\lambda) = (\rho_e + \lambda)(\rho_l + \lambda)(\rho_p + \lambda)(\rho_w + \lambda) - \sigma_e\sigma_l\sigma_p\frac{\phi}{2Q_0} = 0.$$

Percebe-se que todos os coeficientes de ordem um ou superior são positivos (por exemplo, $a_4 = 1$, coeficiente de λ^4 , de ordem 4), e o coeficiente de ordem zero (λ^0 , denominado termo independente de λ) é dado por

$$a_0 = \sigma_e\sigma_l\sigma_p\frac{\phi}{2Q_0}.$$

Como todos os parâmetros são positivos, $a_0 > 0$, e, assim, conforme a conjectura apresentada em (1), o ponto de equilíbrio não-trivial é localmente e assintoticamente estável. Note que este ponto de equilíbrio não-trivial corresponde ao ponto W_- quando $C' \rightarrow \infty$.

Dinamicamente, todas as trajetórias dirigem-se para o ponto de equilíbrio não-trivial, exceto nas curvas dadas por separatrizes, que podem convergir

para equilíbrio trivial. Para C' finito, pode-se fazer seguinte proposição. Os pontos de equilíbrio trivial ($W = 0$) e não-trivial de valor maior (dado por W_+) são instáveis, enquanto o ponto de equilíbrio não-trivial de menor valor (W_-) é estável. Portanto, a dinâmica deste sistema de equações é evitar tanto a extinção ($W = 0$) quanto a explosão populacional (W_+ , que cresce com C') de mosquitos, mantendo a população de mosquitos sempre em valores razoáveis (W_-).

Esta hipótese de oviposição (controle intrínseco da população) por parte das fêmeas faz com que qualquer que seja a forma de controle, só é possível a eliminação da população de mosquitos se eliminar todos os recipientes que sejam criadouro de mosquitos, ou seja, $C' = 0$, conforme a equação (8). Os outros casos de controle apenas diminuem o tamanho da população de mosquitos.

2.2 Capacidade de Oviposição e Bilinearidade

A capacidade de oviposição das fêmeas $\varphi(W)$ depende linearmente com o tamanho da população de mosquitos. Nesta situação tem-se a função

$$\varphi(W) = \phi W, \quad (10)$$

que exibe um comportamento dinâmico similar apresentado por sistemas epidêmicos bilineares, oriundos da lei da ação das massas (2).

Analisa-se este modelo dinâmico substituindo-se a função dada pela equação (10) no sistema de equações (1). Em relação aos pontos de equilíbrio, obtém-se dois pontos.

O equilíbrio trivial é dado pelos valores $E = 0$, $L = 0$, $P = 0$ e $W = 0$. Esta é a situação em que uma comunidade humana está livre de infestação de mosquitos.

O outro ponto de equilíbrio não-trivial é dado por

$$W = QC' \left(1 - \frac{1}{Q_0} \right), \quad (11)$$

e valores de outras três fases dados pela equação (7). Note que $W = 0$ se $Q_0 \leq 1$. Assim, a viabilidade biológica é dada pela condição $Q_0 > 1$.

A análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio é feita da matriz Jacobiana correspondente ao sistema de equações (1) com a equação (10), dada por

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{\phi}{C^g}W - \rho_e & 0 & 0 & \phi \left(1 - \frac{E}{C^g}\right) \\ \sigma_e & -\rho_l & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_l & -\rho_p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_p & -\rho_w \end{bmatrix},$$

calculada no ponto de equilíbrio trivial ou não-trivial. Para tanto calcula-se os auto-valores associados λ obtidos da solução da equação característica $\Lambda(\lambda)$ definida por

$$\Lambda(\lambda) = \det(J - \lambda I),$$

onde \det é determinante da matriz e I é a matriz identidade 4×4 .

O ponto de equilíbrio trivial, com $W = 0$, tem a equação característica dada por

$$\Lambda(\lambda) = (\rho_e + \lambda)(\rho_l + \lambda)(\rho_p + \lambda)(\rho_w + \lambda) - \sigma_e \sigma_l \sigma_p \phi = 0.$$

Percebe-se que todos os coeficientes de ordem um ou superior são positivos (por exemplo, $a_4 = 1$, coeficiente de λ^4 , de ordem 4), e o coeficiente de ordem zero (λ^0 , denominado termo independente de λ) é dado por

$$a_0 = \sigma_e \sigma_l \sigma_p \phi \left(\frac{1}{Q_0} - 1 \right).$$

Como todos os parâmetros são positivos, $a_0 > 0$, se e somente se, $Q_0 < 1$. Assim, conforme a conjectura apresentada em (1), o ponto de equilíbrio trivial é localmente e assintoticamente estável se $Q_0 < 1$, e instável em outros casos.

O ponto de equilíbrio não-trivial, com $E = W/Q$, tem a equação característica dada por

$$\Lambda(\lambda) = \left[\phi Q \left(1 - \frac{1}{Q_0} \right) + \rho_e + \lambda \right] (\rho_l + \lambda)(\rho_p + \lambda)(\rho_w + \lambda) - \sigma_e \sigma_l \sigma_p \frac{\phi}{Q_0} = 0.$$

Percebe-se que todos os coeficientes de ordem um ou superior são positivos (por exemplo, $a_4 = 1$, coeficiente de λ^4 , de ordem 4), e o coeficiente de ordem zero (λ^0 , denominado termo independente de λ) é dado por

$$a_0 = \sigma_e \sigma_l \sigma_p \phi \left(1 - \frac{1}{Q_0} \right).$$

Como todos os parâmetros são positivos, $a_0 > 0$, se e somente se, $Q_0 > 1$. Assim, conforme a conjectura apresentada em (1), o ponto de equilíbrio não-trivial é localmente e assintoticamente estável se $Q_0 > 1$, e instável em outros casos.

Dinamicamente, todas as trajetórias dirigem-se ou para o ponto de equilíbrio trivial ou para o ponto de equilíbrio não-trivial, dependendo do valor de produção média de descendentes fêmeas viáveis Q_0 . Independente da condição inicial, se $Q_0 \leq 1$, então a população de mosquitos vai para extinção; enquanto que se $Q_0 > 1$, a população de mosquitos vai para equilíbrio não-trivial.

Esta hipótese de oviposição (bilinearidade) por parte das fêmeas faz com que exista uma possibilidade para a eliminação da população de mosquitos. Diminui-se a efetividade dos mosquitos na procriação por alguma forma de controle, tornando $Q_0 \leq 1$.

2.3 Capacidade de Oviposição e Dependência Extrínseca

A capacidade de oviposição das fêmeas $\varphi(W)$ pode atuar no sentido de dificultar a persistência de infestação de mosquitos quando o tamanho da sua população é pequena, contudo, para tamanhos relativamente grandes, a infestação de mosquitos é certa e incontrolável. Para tanto, escolhe-se a função do tipo

$$\varphi(W) = \phi W^2 \tag{12}$$

dentre as classes de funções que exibem um comportamento dinâmico similar representadas por $\varphi(W) = \phi W^n$, $n > 1$.

Esta classe de funções descreve uma população que necessita um número razoável de indivíduos para se manter. Este é um caso típico de populações que procriam por acasalamento, pois a probabilidade de acasalamento aumenta com o aumento do tamanho da população. Isto pode ser observado re-escrevendo a equação (12) como $\varphi(W) = \varphi'(W)W$, onde $\varphi'(W)$ é a taxa de oviposição per-capita dada por

$$\varphi'(W) = \phi W.$$

Note que a capacidade efetiva de oviposição sempre aumenta com o aumento do número de mosquitos adultos, sendo que para valores pequenos de W esta capacidade é praticamente zero.

Analisa-se este modelo dinâmico substituindo-se a função dada pela equação (12) no sistema de equações (1). Em relação aos pontos de equilíbrio, obtém-se até três pontos.

O equilíbrio trivial é dado pelos valores $E = 0$, $L = 0$, $P = 0$ e $W = 0$. Esta é a situação em que uma comunidade humana está livre de infestação de mosquitos.

Os outros pontos de equilíbrio não-triviais são obtidos da equação de segundo grau para o número de mosquitos adultos fêmeas W dada por

$$W^2 - QC'W + \frac{QC'}{Q_0} = 0, \quad (13)$$

onde Q e Q_0 são dados pela equação (5). As soluções desta equação são tais que: 1) se $Q_0 < 4/QC'$ não há solução real, 2) se $Q_0 = 4/QC'$ há apenas a solução $W = QC'/2$, e 3) para $Q_0 > 4/QC'$ tem-se duas soluções reais positivas dadas por

$$\begin{cases} W_+ &= \frac{QC'}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{Q_0 QC'}} \right) \\ W_- &= \frac{QC'}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{Q_0 QC'}} \right), \end{cases} \quad (14)$$

onde W_+ e W_- são valores, respectivamente, maior e menor das duas soluções. Os valores das outras fases do ciclo de vida do vetor são dados pela equação (7).

Lembre-se que Q_0 é o número médio de descendentes fêmeas viáveis que um mosquito adulto fêmea produz durante todo o seu período fértil, sendo, assim, quanto maior este valor, maior será a infestação por mosquitos adultos. Dependendo deste valor em relação ao valor limiar dado por

$$Q_{th} = 4/QC', \quad (15)$$

tem-se três situações:

1. Mosquitos pouco efetivos na procriação, naturalmente ou por controle, isto é, quando $Q_0 < Q_{th}$. Neste caso, tem-se apenas um único ponto de equilíbrio dado pelo trivial.
2. Mosquitos efetivos na procriação, naturalmente ou por controle, isto é, quando $Q_0 = Q_{th}$. Tem-se dois pontos de equilíbrio. Além do trivial, surge outro não-trivial dado por $W = QC'/2$.

3. Mosquitos bastante efetivos na procriação, naturalmente ou por controle, isto é, quando $Q_0 > Q_{th}$. Tem-se três pontos de equilíbrio. Além do trivial, surgem dois não triviais dados pela equação (14), que são dois ramos que surgem do mesmo valor $W_+ = W_- = QC'/2$. Note que W_+ é o ramo estritamente crescente e W_- é o ramo estritamente decrescente a partir do valor comum $W_+ = W_- = QC'/2$.

Primeiro, a análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio é restrita para o caso $C' \rightarrow \infty$. Para C' finito, a estabilidade dos pontos de equilíbrio não-triviais é feita numericamente.

A equação do segundo grau para W dada pela equação (14) tem os seguintes valores limites em relação à capacidade remanescente C' . Para $C' = 0$ tem-se um único ponto de equilíbrio dado pelo equilíbrio trivial, pois as duas soluções da equação (8) são $W_+ = W_- = 0$. No outro extremo, para $C' \rightarrow \infty$, tem-se três pontos de equilíbrio: o equilíbrio trivial, o equilíbrio não-trivial finito dado pelo valor $W_- = 1/Q_0$ e o equilíbrio infinito $W_+ \rightarrow \infty$. Porém, impondo $C' \rightarrow \infty$ no sistema de equações (1), e resolvendo, tem-se dois pontos de equilíbrio: o equilíbrio trivial, e o equilíbrio não-trivial dado pelo valor $W = Q_0^2$, que corresponde a W_- , e o valor de W_+ não aparece.

A análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio é feita da matriz Jacobiana correspondente ao sistema de equações (1) com a equação (12), dada por

$$J = \begin{bmatrix} -\rho_e & 0 & 0 & 2\phi W \\ \sigma_e & -\rho_l & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_l & -\rho_p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_p & -\rho_w \end{bmatrix},$$

calculada no ponto de equilíbrio trivial ou não-trivial. Para tanto calcula-se os auto-valores associados λ obtidos da solução da equação característica $\Lambda(\lambda)$ definida por

$$\Lambda(\lambda) = \det(J - \lambda I),$$

onde \det é determinante da matriz e I é a matriz identidade 4×4 .

O ponto de equilíbrio trivial, com $W = 0$, tem os auto-valores dados por

$$\begin{cases} \lambda_1 &= -\rho_e \\ \lambda_2 &= -\rho_l \\ \lambda_3 &= -\rho_p \\ \lambda_4 &= -\rho_w \end{cases}.$$

Como todos os auto-valores são negativos, o ponto de equilíbrio trivial é localmente e assintoticamente estável.

O ponto de equilíbrio não-trivial, com $W = 1/Q_0$, tem a equação característica dada por

$$\Lambda(\lambda) = (\rho_e + \lambda)(\rho_l + \lambda)(\rho_p + \lambda)(\rho_w + \lambda) - 2\sigma_e\sigma_l\sigma_p\frac{\phi}{Q_0} = 0.$$

Percebe-se que todos os coeficientes de ordem um ou superior são positivos (por exemplo, $a_4 = 1$, coeficiente de λ^4 , de ordem 4), e o coeficiente de ordem zero (λ^0 , denominado termo independente de λ) é dado por

$$a_0 = -\sigma_e\sigma_l\sigma_p\frac{\phi}{Q_0}.$$

Como todos os parâmetros são positivos, $a_0 < 0$, e, assim, conforme a conjectura apresentada em (1), o ponto de equilíbrio não-trivial é localmente e assintoticamente instável. Note que este ponto de equilíbrio não-trivial corresponde ao ponto W_- quando $C' \rightarrow \infty$.

Dinamicamente, todas as trajetórias dirigem-se ou para o ponto de equilíbrio trivial ou para o ponto de equilíbrio não-trivial infinito (corresponde ao ponto W_+ quando $C' \rightarrow \infty$). Para C' finito, pode-se fazer seguinte proposição. Os pontos de equilíbrio trivial ($W = 0$) e não-trivial de valor maior (dado por W_+) são estáveis, enquanto o ponto de equilíbrio não-trivial de menor valor (W_-) é instável. Portanto, a dinâmica deste sistema de equações é levar a população para a sua extinção ($W = 0$) ou para a explosão populacional (W_+ , que cresce com C') de mosquitos, dependendo do valor inicial considerado para as quatro fases do ciclo de vida. Como a população de mosquitos em valores razoáveis (W_-) é sempre instável, este ponto de equilíbrio (junto com outros valores dados pela equação (7), para outras três fases) é o “breaking point”.

Esta hipótese de oviposição (controle extrínseco da população) por parte das fêmeas faz com que exista duas possibilidades para a eliminação da população de mosquitos. Primeiro, pode diminuir a efetividade dos mosquitos na procriação por alguma forma de controle, tornando $Q_0 < Q_{th}$. Segundo, se $Q_0 > Q_{th}$ a erradicação não requer a eliminação total de mosquitos, mas apenas diminuir por alguma forma de controle a população de mosquitos para valores $W < W_-$, isto é, reduzir a população dos mosquitos para valores abaixo do valor do “breaking point”.

Segundo, a estabilidade do caso C' finito é possível para o caso $Q_0 = Q_{th}$, que tem dois pontos de equilíbrio: trivial e não-trivial dado por $W = QC'/2$ (e correspondente $E = C'/2$). Neste caso, tem-se a matriz Jacobiana dada por

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{\phi}{C'}W^2 - \rho_e & 0 & 0 & 2\phi W \left(1 - \frac{E}{C'}\right) \\ \sigma_e & -\rho_l & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_l & -\rho_p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_p & -\rho_w \end{bmatrix}.$$

A equação característica correspondente é dada por

$$\Lambda(\lambda) = \left(\frac{\phi Q^2 C'}{4} + \rho_e + \lambda \right) (\rho_l + \lambda) (\rho_p + \lambda) (\rho_w + \lambda) - \sigma_e \sigma_l \sigma_p \frac{\phi Q C'}{2} = 0.$$

Percebe-se que todos os coeficientes de ordem um ou superior são positivos (por exemplo, $a_4 = 1$, coeficiente de λ^4 , de ordem 4), e o coeficiente de ordem zero (λ^0 , denominado termo independente de λ) é dado por

$$a_0 = 0.$$

Como todos os parâmetros são positivos e $a_0 = 0$, então um dos auto-valores é nulo (por exemplo, $\lambda_1 = 0$), entretanto, a equação característica remanescente para terceiro grau satisfaz a conjectura apresentada em (1). Assim, este ponto de equilíbrio não-trivial é localmente e assintoticamente estável, e instável em separatrizes. Note que este ponto de equilíbrio não-trivial corresponde ao ponto $W_+ = W_-$.

O próximo passo é relacionar esta dinâmica da população de mosquitos e a transmissão da dengue.

3 Dinâmica da Transmissão da Dengue

No caso de circulação de um único sorotipo na comunidade, estuda-se a dinâmica acoplada de populações de mosquitos e humana. A dengue é causada por um arbovírus, tendo o mosquito *Aedes aegypti* como o vetor. Esta infecção nos mosquitos parece que não encurta a vida média e nem cria imunidade. Note-se que a vida média dos mosquitos é de alguns dias. Entretanto, na população humana esta infecção, além de resultar em uma indução de imunidade perene, ela é uma doença benigna, e os indivíduos sintomáticos desta doença não são levados à morte. Assim, a população humana será descrita pelo modelo compartimental, baseado na história natural da infecção, do tipo S-E-I-R (indivíduos Suscetível, Exposto, Infectante e Recuperado). Como E já foi designado para o número de ovos, usa-se H para designar os indivíduos expostos.

As seguintes considerações serão usadas no modelo de transmissão da dengue.

1. População de mosquito. A população de mosquitos adultos é subdividida em mosquitos suscetíveis (W_1), infectados porém não infectantes (W_2) e infectantes (W_3). Os mosquitos infectados e não infectantes são retirados a uma taxa γ_w , onde γ_w^{-1} é o período de incubação do vírus da dengue no mosquito. O número total de mosquitos é $W = W_1 + W_2 + W_3$. Matematicamente, os mosquitos suscetíveis (W_1) são infectados pela presença de indivíduos infectantes (I), a uma taxa de ataque (força de infecção) η_w que depende de I , ou seja, $\eta_w(I)$, que leva em consideração a taxa de contato entre indivíduos infectantes e mosquitos suscetíveis, designada por β_w . Biologicamente, os mosquitos suscetíveis são infectados quando picam indivíduos infectantes, e a taxa β_w leva em consideração a frequência de picadas. Os mosquitos infectados e não infectantes (W_2) e infectantes (W_3) são, em geral, mais velhos, por isso acrescenta-se taxas de mortalidade adicional devido ao envelhecimento, dados, respectivamente, por μ_2 e μ_3 , com $\mu_2 < \mu_3$, pois estes são mais velhos que aqueles. Considera-se mecanismos de controle atuando na população de mosquitos, conforme a equação (2).
2. População humana. A população humana é subdividida em quatro compartimentos não-interceptantes. Matematicamente, os indivíduos suscetíveis

(S) são infectados pelos mosquitos infectantes (W_3) e passam para a classe dos expostos (H) a uma taxa de ataque (força de infecção) η_h , que depende de W_3 , ou seja, $\eta_h(W_3)$, que leva em consideração a taxa de contato entre mosquitos infectantes e indivíduos suscetíveis, designada por β_h . Biologicamente, os indivíduos suscetíveis são infectados pelas picadas de mosquitos infectantes, aqueles que haviam previamente picado indivíduos infectantes, e a taxa β_h leva em consideração a frequência de picadas. Os indivíduos expostos são retirados deste compartimento a uma taxa γ_h , onde γ_h^{-1} é o período de incubação do vírus da dengue no indivíduo humano. Finalmente, os indivíduos infectantes são retirados deste compartimento a uma taxa σ_h , onde σ_h^{-1} é o período de infecção (ou recuperação) do indivíduo humano. Não se considera a perda de imunidade adquirida. A população toda é dada por $N = S + H + I + R$. Todos os indivíduos estão sob a influência de uma mesma taxa de mortalidade dada por μ_h . Não há mortalidade adicional pela doença, uma vez que está-se considerando infecção por um único sorotipo.

A dinâmica de transmissão da dengue envolve duas populações. A população de mosquitos, quando há transmissão de dengue, é descrita por

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}E(t) &= \varphi(W) \left[1 - \frac{E(t)}{C'}\right] - \rho_e E(t) \\ \frac{d}{dt}L(t) &= \sigma_e E(t) - \rho_l L(t) \\ \frac{d}{dt}P(t) &= \sigma_l L(t) - \rho_p P(t) \\ \frac{d}{dt}W_1(t) &= \sigma_p P(t) - [\eta_w(I) + \rho_w] W_1(t) \\ \frac{d}{dt}W_2(t) &= \eta_w(I) W_1(t) - \rho_2 W_2(t) \\ \frac{d}{dt}W_3(t) &= \gamma_w W_2(t) - \rho_3 W_3(t), \end{cases} \quad (16)$$

onde as taxas globais de saída ρ_2 e ρ_3 são dadas por

$$\begin{cases} \rho_2 = \gamma_w + \rho_w + \mu_2 \\ \rho_3 = \rho_w + \mu_3. \end{cases} \quad (17)$$

Este sistema de equações corresponde à equação (1) se $\beta_w = 0$, isto é, população de mosquitos sem transmissão da dengue (neste caso, $W = W_1$ e $W_2 = W_3 = 0$).

A população humana é descrita por

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}S(t) &= \varphi'(t) - [\eta_h(W_3) + \mu_h] S(t) \\ \frac{d}{dt}H(t) &= \eta_h(W_3) S(t) - \rho_h H(t) \\ \frac{d}{dt}I(t) &= \gamma_h H(t) - \rho_i I(t) \\ \frac{d}{dt}R(t) &= \sigma_h I(t) - \mu_h R(t) , \end{cases} \quad (18)$$

onde $\varphi'(t)$ é a taxa de entrada de indivíduos na comunidade e as taxas globais de saída ρ_h e ρ_i são dadas por

$$\begin{cases} \rho_h = \gamma_h + \mu_h \\ \rho_i = \sigma_h + \mu_h . \end{cases} \quad (19)$$

Todos os parâmetros foram previamente descritos. Note que a efetiva transmissão da dengue ocorre quando um mesmo mosquito picar sucessivamente um indivíduo infeccioso e, após um período de tempo γ_w^{-1} , picar um indivíduo suscetível.

A duração de uma geração na população de mosquitos é de alguns dias, sendo no máximo dois meses. Entretanto, a duração de uma geração entre os indivíduos humanos é de dezenas de anos. Dessa forma, pode-se trabalhar com uma população humana constante. Esta condição é obtida se impor

$$\varphi'(t) = \mu_h N, \quad (20)$$

onde N é a população total constante de indivíduos em uma comunidade, na equação (18). Em outras palavras, a taxa de natalidade é igual a taxa de mortalidade, isto é, as mortes são repostas por recém-nascidos.

Em relação às forças de infecção $\eta_w(I)$ e $\eta_h(W_3)$, pode-se fazer duas suposições, as mais simples possíveis. Primeiro, supõe-se que o encontro entre os infectantes (homem e mosquito) e suscetíveis (mosquito e homem) seja aleatório, isto é, utiliza-se a lei da ação das massas. Nesta situação tem-se as relações entre as forças de infecção e taxas de contato dadas por

$$\begin{cases} \eta_w(I) = \varepsilon \beta_w I \\ \eta_h(W_3) = \varepsilon \beta_h W_3, \end{cases} \quad (21)$$

que dependem do tamanho da população considerada. O parâmetro ε representa a forma como os indivíduos estão distribuídos geograficamente, facilitando ou não a transmissão da dengue. Segundo, supõe-se que o encontro

entre os infectantes (homem e mosquito) e suscetíveis (mosquito e homem) seja feito por busca ativa por parte dos mosquitos, isto é, utiliza-se eventos probabilísticos. Nesta situação tem-se as relações entre as forças de infecção e taxas de contato dadas por

$$\begin{cases} \eta_w(I) = \varepsilon\beta_w \frac{I}{N} \\ \eta_h(W_3) = \varepsilon\beta_h \frac{W_3}{W}, \end{cases} \quad (22)$$

que dependem da fração da população considerada. Assim, pode-se entender, em primeira ordem de aproximação, a fração de indivíduos infectantes $i \equiv I/N$ como sendo a probabilidade de um mosquito suscetível picar um indivíduo infectante, e a fração de mosquitos infectantes $w_3 \equiv W_3/W$ como sendo a probabilidade de um indivíduo suscetível ser picado por um mosquito infectante.

O objetivo é estudar a dinâmica da transmissão da dengue e os efeitos dos diversos mecanismos de controle. Por este motivo, supõe-se sempre a existência da população humana ($\mu_h > 0$, pois para $\mu_h = 0$ tem-se $N = 0$, que corresponde à ausência da comunidade humana). Entretanto, permite-se a extinção da população de mosquitos, uma vez que os mecanismos de controle da dengue residem-se unicamente na ação nos mosquitos, eventualmente resultando na eliminação de mosquitos.

Para a dinâmica da transmissão da dengue, resultados detalhados são mostrados para o caso $\varphi(W) = \phi W$. Em relação à população humana, usa-se a equação (20) para recém-nascidos, ou seja, $\varphi'(t) = \mu_h N$, com população total constante. Os resultados dos outros dois casos de oviposição são facilmente obtidos.

O sistema de equações (18) pode ser dividido pela população toda constante N , e é re-escrito em termos de frações de indivíduos s , h , i e r , dos compartimentos, respectivamente, de suscetíveis, expostos, infectantes e recuperados. Assim, resolve-se o sistema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}s(t) &= \mu_h - [\eta_h(W_3) + \mu_h]s(t) \\ \frac{d}{dt}h(t) &= \eta_h(W_3)s(t) - \rho_h h(t) \\ \frac{d}{dt}i(t) &= \gamma_h h(t) - \rho_i i(t) \\ \frac{d}{dt}r(t) &= \sigma_h i(t) - \mu_h r(t), \end{cases} \quad (23)$$

junto com o sistema de equações (16) para a dinâmica da população de mosquitos. Lembre que tem-se $\mu_h > 0$.

Estes sistemas de equações serão estudados de acordo com a hipótese admitida para a quantificação das forças de infecção η_h e η_w . Estas forças de infecção são as incidências de novos casos de infecção, nos homens e nos mosquitos, por indivíduos suscetíveis. Estuda-se o encontro probabilístico e o encontro aleatório, isto é, dada uma certa quantidade de indivíduos (mosquitos) suscetíveis, o risco destes suscetíveis de contraírem a doença pode ser estudado considerando o encontro probabilístico ou o encontro aleatório com os indivíduos (mosquitos) infectantes.

3.1 Evento probabilístico

Estuda-se o caso do evento probabilístico, com as forças de infecções dadas pela equação (22).

Os pontos de equilíbrio dos sistemas de equações (23) e (16) com as forças de infecção dada pela equação (22) são três.

1. População humana livre de mosquitos. Os valores para cada compartimento de mosquitos e homens são dados por

$$\begin{cases} E = L = P = W_1 = W_2 = W_3 = 0 \\ s = 1 \\ h = i = r = 0, \end{cases} \quad (24)$$

cujos valores são válidos para $\phi \leq \phi_{th}$ e $R_0 \leq 1$, onde R_0 é dada por

$$R_0 = \frac{\gamma_w \gamma_h \varepsilon^2 \beta_w \beta_h}{\rho_2 \rho_3 \rho_h \rho_i}, \quad (25)$$

com ϕ_{th} sendo dada pela equação (6). O parâmetro R_0 representa a razão de repordutibilidade da dengue, pois está considerando o controle do vetor. Se não houver nenhum mecanismo de controle no vetor, tem-se, então, a razão de reprodutibilidade basal.

2. População humana infestada por mosquitos sem a transmissão da dengue. Os valores para cada compartimento de mosquitos e homens são dados

por

$$\begin{cases} E = C' \left(1 - \frac{\phi_{th}}{\phi}\right) \\ L = \frac{\sigma_e}{\rho_l} E \\ P = \frac{\sigma_e}{\rho_l} \frac{\sigma_l}{\rho_p} E \\ W_1 = W = \frac{\sigma_e}{\rho_l} \frac{\sigma_l}{\rho_p} \frac{\sigma_p}{\rho_w} E \\ W_2 = W_3 = 0 \\ s = 1 \\ h = i = r = 0, \end{cases} \quad (26)$$

cujos valores são válidos para $\phi > \phi_{th}$ e $R_0 \leq 1$.

3. População humana infestada por mosquitos com a transmissão da dengue. Os valores para cada compartimento de mosquitos e homens são dados por

$$\begin{cases} L = \frac{\sigma_e}{\rho_l} E \\ P = \frac{\sigma_e}{\rho_l} \frac{\sigma_l}{\rho_p} E \\ W_1 = \frac{\sigma_e}{\rho_l} \frac{\sigma_l}{\rho_p} \frac{\sigma_p}{\rho_w} \frac{1}{\left[1 + \frac{\gamma_h \varepsilon \beta_w}{\rho_w \rho_i} h\right]} E \\ W_2 = \frac{\sigma_e}{\rho_l} \frac{\sigma_l}{\rho_p} \frac{\sigma_p}{\rho_w} \frac{\gamma_h \varepsilon \beta_w}{\rho_2 \rho_i \left[1 + \frac{\gamma_h \varepsilon \beta_w}{\rho_w \rho_i} h\right]} h E \\ W_3 = \frac{\gamma_w}{\rho_3} W_2 \\ s = \frac{1}{R_0} \left[1 + \frac{\gamma_h \varepsilon \beta_w (\rho_3 + \gamma_w)}{\rho_2 \rho_3 \rho_i} h\right] \\ i = \frac{\gamma_h}{\rho_i} h \\ r = \frac{\gamma_h}{\rho_i} \frac{\sigma_h}{\mu_h} h, \end{cases} \quad (27)$$

mais os valores para E e h dados por

$$\begin{cases} E = C' \left(1 - \frac{\phi'}{\phi}\right) \\ h = \frac{\gamma_w \mu_h \varepsilon \beta_h}{\rho_h [\mu_h (\rho_3 + \gamma_w) + \gamma_w \varepsilon \beta_h]} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right), \end{cases} \quad (28)$$

cujos valores são válidos para $\phi > \phi'$ e $R_0 > 1$, onde ϕ' é dada por

$$\phi' = \frac{\phi_{th}}{\left[1 + \frac{\gamma_h \varepsilon \beta_w (\rho_3 + \gamma_w)}{\rho_2 \rho_3 \rho_i} h\right] \frac{\rho_w \rho_i}{\gamma_h \varepsilon \beta_w h + \rho_w \rho_i}}, \quad (29)$$

com ϕ_{th} sendo dada pela equação (6). Note que se não houver transmissão da dengue, tem-se $\phi' = \phi_{th}$. A função ϕ' é estritamente crescente

com h , tendo um valor assintótico ϕ_∞ dado por

$$\phi_\infty = \frac{\rho_e \rho_l \rho_p \rho_2 \rho_3}{\sigma_e \sigma_l \sigma_p (\gamma_w + \rho_3)},$$

obtido do limite $h \rightarrow \infty$.

A estabilidade do ponto de equilíbrio trivial não se faz por meio da equação característica, pois na matriz Jacobiana tem-se divisão por zero. Por isso, faz-se a análise de estabilidade do ponto de equilíbrio da população humana infestada de mosquitos sem dengue, dada pela equação (26). A equação característica é dada por

$$\Lambda(\lambda) = P_1(\lambda) P_2(\lambda) = 0,$$

onde os polinômios de quarto grau $P_1(\lambda)$ e $P_2(\lambda)$ são dadas por

$$\begin{cases} P_1(\lambda) = (\rho_e R_0 + \lambda)(\rho_l + \lambda)(\rho_p + \lambda)(\rho_w + \lambda) - \frac{\phi \sigma_e \sigma_l \sigma_p}{Q_0} = 0 \\ P_2(\lambda) = (\rho_2 + \lambda)(\rho_3 + \lambda)(\rho_h + \lambda)(\rho_i + \lambda) - \varepsilon^2 \gamma_w \gamma_h \beta_w \beta_h = 0, \end{cases}$$

com Q_0 dada pela equação (5) e os termos independentes de λ dados por

$$\begin{cases} a_1^0 = \rho_e \rho_l \rho_p \rho_w \left(\frac{\phi}{\phi_{th}} - 1 \right) \\ a_2^0 = \rho_2 \rho_3 \rho_h \rho_i (1 - R_0). \end{cases}$$

Note que os termos independentes são positivos para $\phi > \phi_{th}$ e $R_0 \leq 1$. Assim, o ponto de equilíbrio não-trivial dado pela equação (26) é localmente e assintoticamente estável se $\phi > \phi_{th}$ e $R_0 \leq 1$. Dessa forma, conjectura-se que, se $\phi \leq \phi_{th}$ e $R_0 \leq 1$ então o equilíbrio trivial é estável, enquanto que, se $\phi > \phi_{th}$ e $R_0 > 1$ então o equilíbrio endêmico da dengue é estável.

Para a dinâmica da transmissão da dengue, com $\varphi(W) = \phi\sqrt{W}$ e $\varphi(W) = \phi W^2$, única equação no estado estacionário que difere corresponde ao compartimento de ovos. Assim, basta resolver a equação

$$\varphi(W) \left[1 - \frac{E(t)}{C'} \right] - \rho_e E(t) = 0$$

com os resultados para outros compartimentos.

3.2 Encontro aleatório

Estuda-se o caso do evento probabilístico, com as forças de infecções dadas pela equação (21).

Os pontos de equilíbrio dos sistemas de equações (23) e (16) com as forças de infecção dada pela equação (21) são três.

1. População humana livre de mosquitos. Os valores para cada compartimento de mosquitos e homens são dados por

$$\begin{cases} E = L = P = W_1 = W_2 = W_3 = 0 \\ s = 1 \\ h = i = r = 0, \end{cases} \quad (30)$$

cujos valores são válidos para $\phi \leq \phi_{th}$, com ϕ_{th} sendo dada pela equação (6).

2. População humana infestada por mosquitos sem a transmissão da dengue. Os valores para cada compartimento de mosquitos e homens são dados por

$$\begin{cases} E = C' \left(1 - \frac{\phi_{th}}{\phi} \right) \\ L = \frac{\sigma_e}{\rho_l} E \\ P = \frac{\sigma_e}{\rho_l} \frac{\sigma_l}{\rho_p} E \\ W_1 = W = \frac{\sigma_e}{\rho_l} \frac{\sigma_l}{\rho_p} \frac{\sigma_p}{\rho_w} E \\ W_2 = W_3 = 0 \\ s = 1 \\ h = i = r = 0, \end{cases} \quad (31)$$

cujos valores são válidos para $\phi > \phi_{th}$ e $ER'_0 \leq 1$, onde R'_0 é dada por

$$R'_0 = R_0 \frac{\rho_e}{\phi_{th}}, \quad (32)$$

com ϕ_{th} sendo dada pela equação (6). Novamente, o parâmetro R'_0 representa a razão de repordutibilidade da dengue, pois está considerando o controle do vetor. Se não houver nenhum mecanismo de controle no vetor, tem-se, então, a razão de reprodutibilidade basal.

3. População humana infestada por mosquitos com a transmissão da dengue. Os valores para cada compartimento de mosquitos e homens são dados por

$$\left\{ \begin{array}{l} L = \frac{\sigma_e}{\rho_l} E \\ P = \frac{\sigma_e}{\rho_l} \frac{\sigma_l}{\rho_p} E \\ W_1 = \frac{\sigma_e}{\rho_l} \frac{\sigma_l}{\rho_p} \frac{\sigma_p}{\rho_w} \frac{1}{\left[1 + \frac{\gamma_h \varepsilon \beta_w}{\rho_w \rho_i} h\right]} E \\ W_2 = \frac{\sigma_e}{\rho_l} \frac{\sigma_l}{\rho_p} \frac{\sigma_p}{\rho_w} \frac{\gamma_h \varepsilon \beta_w}{\rho_2 \rho_i \left[1 + \frac{\gamma_h \varepsilon \beta_w}{\rho_w \rho_i} h\right]} h E \\ W_3 = \frac{\gamma_w}{\rho_3} W_2 \\ s = \frac{\rho_2 \rho_3 \rho_h \rho_i}{\gamma_w \gamma_h \varepsilon^2 \beta_w \beta_h} \left[1 + \frac{\gamma_h \varepsilon \beta_w}{\rho_w \rho_i} h\right] \frac{1}{E} \\ i = \frac{\gamma_h}{\rho_i} h \\ r = \frac{\gamma_h}{\rho_i} \frac{\sigma_h}{\mu_h} h, \end{array} \right. \quad (33)$$

mais os valores para E (solução de uma equação de segundo grau) e h dados por

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 E^2 + a_1 E - a_0 = 0 \\ h = \frac{\mu_h q}{\rho_h R'_0} \frac{ER'_0 - 1}{Eq + \mu_h}, \end{array} \right. \quad (34)$$

cujos valores são válidos para $ER'_0 > 1$, onde q é dada por

$$q = \frac{\gamma_w \varepsilon \beta_h \sigma_e \sigma_l \sigma_p}{\rho_2 \rho_3 \rho_p \rho_l},$$

e os coeficientes são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{\gamma_w \mu_3 + \rho_3 \mu_2}{\rho_2 \rho_3} \\ a_1 = \frac{\gamma_w \mu_3 + \rho_3 \mu_2}{\rho_2 \rho_3} + \frac{q}{\mu_h} \left\{ \frac{1 - R_0}{R_0} + \frac{\gamma_h \varepsilon \beta_w \mu_h}{\rho_h \rho_i} \left[\frac{1}{R_0 \rho_w} - \frac{\rho_3 + \gamma_w}{\rho_2 \rho_3} \right] \right\} \\ a_2 = \frac{q}{\mu_h} \left[1 + \frac{\gamma_h \varepsilon \beta_w (\rho_3 + \gamma_w) \mu_h}{\rho_2 \rho_3 \rho_h \rho_i} \right]. \end{array} \right.$$

Se $ER'_0 > 1$, então a condição $\phi > \phi_{th}$ é satisfeita automaticamente, assim como $R_0 > 1$. A equação de segundo grau tem uma única solução real positiva, pois $a_i > 0$, para $i = 0, 1$ e 2 .

A análise de estabilidade do ponto de equilíbrio da população humana infestada de mosquitos sem dengue, dada pela equação (30), é feita pela equação característica

$$\Lambda(\lambda) = P_1(\lambda) P_2(\lambda) = 0,$$

onde os polinômios de quarto grau $P_1(\lambda)$ e $P_2(\lambda)$ são dadas por

$$\begin{cases} P_1(\lambda) = (\rho_e + \lambda)(\rho_l + \lambda)(\rho_p + \lambda)(\rho_w + \lambda) - \phi\sigma_e\sigma_l\sigma_p = 0 \\ P_2(\lambda) = (\rho_2 + \lambda)(\rho_3 + \lambda)(\rho_h + \lambda)(\rho_i + \lambda) = 0, \end{cases}$$

com os termo independente de λ dado por

$$\begin{cases} a_1^0 = \rho_e\rho_l\rho_p\rho_w \left(1 - \frac{\phi}{\phi_{th}}\right) \\ a_2^0 = \rho_2\rho_3\rho_h\rho_i. \end{cases}$$

Note que o termo independente para $P_1(\lambda)$ é positivo para $\phi < \phi_{th}$. Assim, o ponto de equilíbrio não-trivial dado pela equação (30) é localmente e assintoticamente estável se $\phi < \phi_{th}$, pois os auto-valores de $P_2(\lambda)$, dados por

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\rho_2 \\ \lambda_2 = -\rho_3 \\ \lambda_3 = -\rho_h \\ \lambda_4 = -\rho_i, \end{cases}.$$

são todos reais negativos.

A análise de estabilidade do ponto de equilíbrio da população humana infestada de mosquitos sem dengue, dada pela equação (31), é feita pela equação característica

$$\Lambda(\lambda) = P_1(\lambda)P_2(\lambda) = 0,$$

onde os polinômios de quarto grau $P_1(\lambda)$ e $P_2(\lambda)$ são dadas por

$$\begin{cases} P_1(\lambda) = (\rho_e R_0 + \lambda)(\rho_l + \lambda)(\rho_p + \lambda)(\rho_w + \lambda) - \frac{\phi\sigma_e\sigma_l\sigma_p}{Q_0} = 0 \\ P_2(\lambda) = (\rho_2 + \lambda)(\rho_3 + \lambda)(\rho_h + \lambda)(\rho_i + \lambda) - \varepsilon^2\gamma_w\gamma_h\beta_w\beta_h\frac{\sigma_e\sigma_l\sigma_p}{\rho_l\rho_p\rho_w}E = 0, \end{cases}$$

com Q_0 dada pela equação (5) e os termos independentes de λ dados por

$$\begin{cases} a_1^0 = \rho_e\rho_l\rho_p\rho_w \left(\frac{\phi}{\phi_{th}} - 1\right) \\ a_2^0 = \rho_2\rho_3\rho_h\rho_i (1 - ER'_0). \end{cases}$$

Note que os termos independentes são positivos para $\phi > \phi_{th}$ e $ER'_0 < 1$. Assim, o ponto de equilíbrio não-trivial dado pela equação (31) é localmente

e assintoticamente estável se $\phi > \phi_{th}$ e $ER'_0 > 1$. Dessa forma, conjectura-se que, se $ER'_0 > 1$ então o equilíbrio endêmico da dengue é estável.

Para a dinâmica da transmissão da dengue, com $\varphi(W) = \phi\sqrt{W}$ e $\varphi(W) = \phi W^2$, única equação no estado estacionário que difere corresponde ao compartimento de ovos. Assim, basta resolver a equação

$$\varphi(W) \left[1 - \frac{E(t)}{C'} \right] - \rho_e E(t) = 0$$

com os resultados para outros compartimentos.

4 Conclusão

A população de mosquitos resiste a intensos mecanismos de controle devido à abundância de criadouros. Esta capacidade de evasão e perpetuação podem ser explicadas de duas maneiras: pela forma de oviposição (diferentes modelos) ou pela elevada capacidade de geração de fêmeas (valores elevados de razão de reprodutibilidade).

A dinâmica da transmissão da dengue depende da forma como a doença se propaga. Os resultados oriundos de encontro como um evento probabilístico (“verdadeira” lei da ação das massas, segundo alguns autores) diferem dos de encontro aleatório (“falsa” lei da ação das massas). Note que esta diferenciação nos resultados só aparece se a população total variar com o tempo, sendo que no caso de população constante, os resultados epidemiológicos são os mesmos, independentes do tipo de encontro considerado.

Referências

- [1] Leite, M.B.F.; Bassanezi, R.C. & Yang, H.M. (2000). The *Basic Reproduction Ratio* for A Model of Directly Transmitted Infections Considering The Virus Charge and The Immunological Response. **IMA Jour. Math. Appl. Med. Biol.** **17** (1): 15-31.
- [2] Yang, H.M. (2001). Epidemiologia Matemática - Estudo dos Efeitos da Vacinação em Doenças de Transmissão Direta. EDUNICAMP e FAPESP, Campinas e São Paulo: 239 pp.

Dinâmica de população via inclusões diferenciais fuzzy

Yurilev Chalco-Cano^{*†}, Rodney C. Bassanezi[‡]

Marko A. Rojas-Medar^{§¶} e Marina T. Mizukoshi^{||}

IMECC-UNICAMP, C.P. 6065, 13081-970, Campinas-SP, Brazil.

Resumo

Introduzimos um novo enfoque de dinâmica de população usando a teoria de inclusões diferenciais fuzzy. Damos exemplos de aplicação assim como um estudo de estabilidade para cada exemplo.

1 Introdução

Os modelos determinísticos formulados para estudos de dinâmica populacional consideram, invariavelmente, parâmetros constantes ou temporais, obtidos como médias de situações analisadas. Tais modelos não contemplam tipos de subjetividades que são inerentes ao processo de variação populacional. Os indivíduos são considerados homogêneos e todos possuem as mesmas características de evolução. Entretanto, na realidade, quando analisamos cada elemento de uma comunidade, verificamos que o indivíduo ou

^{*}Ph-D Student,supported by FAPESP-Brazil through Project 00/00055-0.

[†]e-mail: katary@ime.unicamp.br

[‡]e-mail: rodney@ime.unicamp.br

[§]This work was partially supported by CNPq-Brazil through Project 300116/93(RN).

[¶]e-mail: marko@ime.unicamp.br

^{||}e-mail: marinam@ime.unicamp.br

um grupo de indivíduos possuem características diferenciadas dos restantes que podem influenciar na dinâmica da população. Neste caso, devemos considerar as variáveis de estado diferenciadas segundo a pertinência destas características. Por outro lado, a dinâmica populacional pode ser também influenciada por características independentes das variáveis de estado: habitação, lazer, salário, ambiente de trabalho, violência etc . O valor específico destas características nem sempre podem ser avaliados ou medidos no sentido tradicional são “incertezas ” que somente podemos conjecturar intuitivamente. Assim, podemos afirmar, sempre com alguma incerteza, que existem incertezas na dinâmica devido a ruídos na demografia ou no meio.

Assim sendo, quando fazemos análises de modelos biológicos mais realistas devemos contemplar as incertezas próprias do fenômeno estudado.

Consideremos o modelo determinístico descrito por uma equação diferencial

$$x' = f(t, x). \quad (1)$$

Dado (1), podemos inserir a incerteza ou ruído, introduzindo um parâmetro u na dinâmica, ou seja,

$$x' = f(t, x, u) \quad (2)$$

A priori existem duas aproximações distintas para (2).

1) Se a natureza dessas incertezas for aleatória, então o problema determinístico nos leva a uma equação diferencial estocástica. Neste caso, devido à complexidade das equações resultantes aos modelos estocásticos, geralmente, faz-se a inserção de ruídos de forma linear em u , isto é, assumindo que o ruído entra na dinâmica linearmente, com uma distribuição probabilística

$$x' = f(t, x) + g(t, x)u \quad (3)$$

Neste caso, u é denominado ruído branco, proveniente da diferencial estocástica do movimento Browniano.

2) Se o ruído não possui estrutura probabilística, ou tal estrutura não pode ser avaliada a priori, então poderá ser mais apropriado a utilização dos sistemas variacionais fuzzy ou das inclusões diferenciais fuzzy para a formulação dos modelos matemáticos.

Suponhamos que U seja um conjunto compacto de funções suficientemente regulares, então (2) pode ser escrito como a seguinte inclusão diferencial

$$x' \in F(t, x) = \{f(t, x, u)/u \in U\} \quad (4)$$

Notemos que no modelo determinístico (1), a velocidade é conhecida para cada (t, x) , enquanto que na inclusão diferencial (4), a velocidade não é dada, mas sabemos que está no conjunto $F(t, x)$, gerando a incerteza.

Em (6), Krivan considera o ruído u desconhecido limitado, tendo natureza determinística, isto é,

$$F(t, x) = h(t, x, c[-1, 1])$$

e tomando uma métrica de “verossemelhança” para se avaliar o quanto uma solução é melhor do que outra.

Analizando as metodologias propostas por May para o ruído de natureza aleatória (7), a teoria de inclusões diferenciais e a proposta por Krivan (6), consideramos que uma razoável generalização do problema (1), para modelar sistemas dinâmicos com incertezas, é substituir no modelo (4), a multifunção F por uma multifunção fuzzy, isto é, $F(t, x)$ é um conjunto fuzzy para cada (t, x) . Isto nos levou a utilizar o conceito de inclusão diferencial fuzzy formulado por Zhu e Rhao (8) que consideram as inclusões diferenciais dadas pelos níveis que dependem da variável de estado x .

Neste trabalho, estudamos um modelo com variação proporcional, usando a teoria de inclusões diferenciais fuzzy e analisamos a estabilidade dos estados de equilíbrio, utilizando o conceito de diferenciabilidade de multifunções fuzzy(4).

2 Preliminares

Denotaremos por $K(\mathbb{R}^n)$ ($K_C(\mathbb{R}^n)$) a família de todos os subconjuntos compactos e não vazios de \mathbb{R}^n (compactos e convexos). Para $A, B \in K(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos as operações de soma e producto escalar como

$$A + B = \{a + b/a \in A, b \in B\} \quad \lambda A = \{\lambda a/a \in A\}$$

O espaço $K(\mathbb{R}^n)$ com as operações definidas acima e com a relação de inclusão, é um espaço quasilinear com elemento neutro $\{0\}$ [ver (5)]. A métrica de

Hausdorff definida sobre $K(\mathbb{R}^n)$ é dada por

$$H(A, B) = \inf\{r \geq 0 \mid A \subset B + rS_1(0) \text{ e } B \subset A + rS_1(0)\},$$

onde $S_1(0)$ é a bola fechada de raio 1 e centro 0.

Um conjunto fuzzy sobre \mathbb{R}^n é uma função $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0; 1]$. Para $0 < \alpha \leq 1$ denotaremos por $[u]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) \geq \alpha\}$ o α -nível de u e $[u]^0 = \text{supp } u = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) > 0\}}$, denominado o suporte de u .

Um conjunto fuzzy u é chamado compacto (compacto convexo) se $[u]^\alpha \in K(\mathbb{R}^n)$, $\forall \alpha \in [0; 1]$ ($[u]^\alpha \in K_C(\mathbb{R}^n)$, $\forall \alpha \in [0; 1]$).

Denotemos por $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ($\mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$) o espaço de todos os conjuntos fuzzy compactos (fuzzy compacto convexos). Podemos definir uma relação de ordem parcial \subset sobre $\mathcal{F}(X)$ como sendo

$$u \subset v \Leftrightarrow u(x) \leq v(x) \quad \forall x \in X \Leftrightarrow [u]^\alpha \subseteq [v]^\alpha \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

As operações de soma e produto escalar sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ são definidas como sendo

$$(u + v)(x) = \sup_{y \in X} \min\{u(y), v(x - y)\} \quad \text{e} \quad (\lambda u)(x) = \begin{cases} u(\frac{x}{\lambda}) & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}}(x) & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}$$

Com as definições anteriores obtemos que $[u + v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha$ e $[\lambda u]^\alpha = \lambda[u]^\alpha$ $\forall \alpha \in [0, 1]$. O espaço $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ com as operações definidas acima e a relação de ordem parcial \subset é um espaço quasilinear com elemento neutro $\chi_{\{0\}}$ ($\chi_{\{0\}}$ denota a função característica do conjunto $\{0\}$) [ver (5)]. Também podemos definir uma métrica sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ como segue

$$D(u, v) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} H([u]^\alpha, [v]^\alpha).$$

Uma multifunção fuzzy $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é chamada quasilinear [ver (4), (5)] se

$$\begin{aligned} F(\lambda x) &= \lambda F(x), & \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ F(x_1 + x_2) &\subset F(x_1) + F(x_2) & \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

F é **limitada** se existe $K > 0$ tal que $D(F(x), \{0\}) \leq K\|x\|$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ uma multifunção fuzzy, $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow [0; 1]$ uma função e J um intervalo em \mathbb{R} . Consideremos o seguinte problema de inclusão diferencial para multifunção fuzzy [ver (8)]: determinar $x \in C(J, \mathbb{R}^n)$ tal que

$$x'(t) \in [F(x(t))]^{\alpha(x(t))}, \quad (5)$$

Dizemos que (5) é uma **inclusão diferencial fuzzy**. Se F é um operador quasilinear, então (5) é uma inclusão diferencial quasilinear fuzzy.

A seguir daremos os conceitos de diferenciabilidade e estabilidade e, enunciaremos o resultado de estabilidade para inclusões diferenciais fuzzy (ver (4)).

Definição 1. *Uma multifunção fuzzy $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é chamada Fréchet diferenciável em $x_0 \in U$ se existe um operador quasilinear e limitado $\mathcal{D}_{x_0}(F) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$D(F(x), F(x_0) + \mathcal{D}_{x_0}(F)(x - x_0)) = o(\|x - x_0\|).$$

O operador quasilinear $\mathcal{D}_{x_0}(F)$ é chamado a Fréchet derivada de F em x_0 .

Proposição 1. *(4) Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ um operador quasilinear e limitado. Então F é Fréchet diferenciável em $x = 0$ e $\mathcal{D}_0(F) = F$.*

Consideremos a inclusão diferencial fuzzy (5), assumindo a condição $F(0) = \chi_{\{0\}}$. Dizemos que a posição de equilíbrio $x = 0$ de (5) é **Lyapunov-estável** se a seguintes condições são satisfeitas:

1. Se $\|x(t_0)\| < \delta_0$ para algum $\delta_0 > 0$, então existe uma solução $x(t)$ com a condição inicial $x(t_0)$ que está definida para qualquer $t \geq t_0$;
2. Para qualquer $\epsilon > 0$ existe $0 < \delta_1 \leq \delta_0$ tal que se $\|x(t_0)\| < \delta_1$, então $\|x(t)\| < \epsilon$ para qualquer $t \geq t_0$.

Uma posição de equilíbrio Lyapunov-estável $x = 0$ é chamada **assintoticamente estável** se existe um número positivo $\delta_2 \leq \delta_0$ tal que se $\|x(t_0)\| < \delta_2$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$.

Teorema 1. *(4) Seja o ponto 0 uma posição de equilíbrio da inclusão diferencial fuzzy (5). Suponhamos que a multifunção fuzzy $F : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ é diferenciável em 0 e que existe um número $\delta_0 > 0$ tal que se $\|x(0)\| \leq \delta_0$, então*

qualquer solução $x(t)$ de (5) existe no intervalo $[0, +\infty)$. Nestas condições se para algum $\alpha \in [0; 1]$ a posição de equilíbrio $x = 0$ da inclusão diferencial quasilinear

$$x' \in [\mathcal{D}_0(F)(x)]^\alpha$$

é assintoticamente estável, então este ponto é uma posição de equilíbrio assintoticamente estável da inclusão diferencial fuzzy (5), isto é, existem $\sigma > 0$, $k > 0$ e $\delta > 0$ tal que qualquer solução $x(t)$ de (5) satisfaz a desigualdade

$$\|x(t)\| \leq k\|x(0)\| \exp(-\sigma t)$$

para todo $t \geq 0$ se $\|x(0)\| < \delta$.

3 Dinâmica populacional com ruído

Seja $x(t)$ a densidade de uma população no tempo t e consideremos os modelos clássicos de crescimento exponencial e o logístico, isto é,

$$f(x) = rx \quad , \quad f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right).$$

Na biologia populacional teórica existem duas fontes de perturbações do tipo (3), são os ruídos demográfico (aptidões individuais distintas) e o ruído ambiental (variações abióticas). Nisbet e Gurney propuseram a seguinte aproximação para o ruído demográfico:

$$g(x) = \sqrt{(b(x) + d(x))x}$$

onde $b(x)$ e $d(x)$ são as razões de natalidade e mortalidade instantâneas, respectivamente.

Em populações com grande densidade o ruído demográfico é menos insignificante e, neste caso, é mais natural considerar apenas o ruído nos parâmetros. Consideremos que somente a taxa de crescimento r é afetado. Assim, para o modelo exponencial temos:

$$x' = rx + xu = x(r + u) \tag{6}$$

e para o modelo logístico

$$x' = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) + x \left(1 - \frac{x}{k}\right) = x \left(1 - \frac{x}{k}\right) (r + u)$$

Suponhamos ainda que o ruído seja limitado por uma constante $c > 0$, então podemos considerar a seguinte inclusão diferencial

$$x' \in f(x) + cg(x)[-1; 1]. \quad (7)$$

Um estudo detalhado do problema (7) é feito em (6).

Baseado nos conceitos anteriores e na naturalidade de incerteza da constante r , introduzimos um novo modelo para o problema exponencial, onde tomaremos a constante r como um conjunto fuzzy u . Este conjunto fuzzy deve representar a nebulosidade de alguma característica da população que perturbe a sua variação.

Sejam, $x(t)$ a densidade da população no instante t e $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$ uma função, consideraremos as inclusões diferenciais do tipo

$$x' \in [u.x]^{\alpha(x)} \quad (8)$$

onde

u é um conjunto fuzzy.

$u.x$ é o produto escalar no espaço $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Na inclusão diferencial fuzzy (8) temos que a multifunção fuzzy $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ é dada por $F(x) = u.x$.

F é um operador quasilinear e limitado e portanto diferenciável em $x = 0$. Também temos que $x = 0$ é um ponto de equilíbrio ($F(0) = \chi_{\{0\}}$) da inclusão diferencial fuzzy (8).

A seguir daremos duas aplicações relativas a (8) e os resultados referentes a estabilidade de Lyapunov serão utilizadas para análise da estabilidade do ponto $x = 0$.

Exemplo 1 (expectativa de vida)

Suponhamos que A seja um conjunto de operários com $x(t)$ indivíduos no instante t . Consideraremos o problema de expectativa de vida dos elementos

de A , supondo que a pobreza seja um fator que contribui para o aumento da taxa de mortalidade dos indivíduos.

Para modelar a “pobreza”, poderíamos utilizar qualquer indicador da mesma, como por exemplo, consumo de vitaminas, saneamento básico, renda, etc. Em (2) é feito um estudo completo do modelo diferencial para a esperança de vida de um grupo de trabalhadores, usando o salário (renda) como fator de incerteza na taxa de mortalidade

$$x'(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2 \cdot u(r))x(t),$$

Neste caso, o conjunto fuzzy que avalia o grau de pertinência da pobreza foi definido por

$$u(r) = \begin{cases} [1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2]^k & \text{se } 0 < r < r_0 \\ 0 & \text{se } r \geq r_0 \end{cases}$$

onde, k é um parâmetro que fornece alguma característica do grupo, r é um parâmetro proporcional à renda do indivíduo e r_0 é a renda mínima a partir da qual os indivíduos não são mais diferenciados quanto à pobreza e portanto, não mais influenciam na taxa de mortalidade.

Definimos $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$ por

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x^k & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Estamos considerando o modelo normalizado, isto é, $x = 1$ é a população total de indivíduos.

Considerando (8), temos a seguinte inclusão diferencial

$$x' \in -[(\lambda_1 + \lambda_2 \cdot u)x]^{\alpha(x)}, \quad (9)$$

onde

λ_1 é a taxa de mortalidade natural (obtida em um grupo que dispõe de condições satisfatórias de sobrevivência);

$\lambda_2 \cdot u$ indica a influência da pobreza no aumento da taxa de mortalidade do grupo;

u é o conjunto fuzzy dos pobres de acordo com a renda r .

Notemos que se $r \geq r_0$, então $u(r) = 0$ e (9) se reduz ao modelo determinístico

$$x' = -\lambda_1 x.$$

Agora para $r \leq r_0$

$$\begin{aligned} [u]^{\alpha(x)} &= \{r / u(r) \geq \alpha(x)\} \\ &= \left\{ r / \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]^k \geq x^k \right\} \\ &= r_0[0; \sqrt{1-x}]. \end{aligned}$$

Logo, a inclusão diferencial fuzzy (9), para $0 < x \leq 1$, é equivalente à inclusão diferencial

$$x' \in -\lambda_1 x - \lambda_2 r_0 x [0; \sqrt{1-x}]$$

ou

$$x' \in -\lambda_1 x - \lambda_2 r_0 x \sqrt{1-x} [0; 1] \quad (10)$$

Observação 1. *Podemos ver que a inclusão diferencial (10) é semelhante à do problema (7). Por isso, esta nova idéia de enfocar os problemas de dinâmica de população, usando as inclusões diferenciais fuzzy, é uma boa generalização das já estudadas.*

Para achar soluções de (10), uma das técnicas é encontrar seleções da multifunção, isto é, obter funções f tal que $f(x) \in G(x) \forall x$. Logo, as soluções de (10) são aquelas que resolvem a equação diferencial (ver (1))

$$x' = f(x).$$

Assim, para a multifunção $G(x) = -\lambda_1 x - \lambda_2 r_0 x [0; \sqrt{1-x}]$ em (10), temos que:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \min_{m \in [0,1]} \{-\lambda_1 x - (\lambda_2 r_0 x \sqrt{1-x})\} = -\lambda_1 x - \lambda_2 r_0 x \sqrt{1-x}; \\ f_2(x) &= \max_{m \in [0,1]} \{-\lambda_1 x - (\lambda_2 r_0 x \sqrt{1-x})\} = -\lambda_1 x, \end{aligned}$$

e toda $f(x) \in G(x)$ é tal que $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$. Assim, por exemplo,

$$\begin{aligned} f_3(x) &= -\lambda_1 x - \lambda_2 r_0 x(1-x) \\ f_4(x) &= -\lambda_1 x - \lambda_2 r_0 x \sqrt{1-x} \left| \sin(1/x^2) \right| \end{aligned}$$

são elementos de $G(x)$.

Para cada $f(x) \in G(x)$ temos uma solução do problema de Cauchy

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Neste caso, temos que o conjunto atingível (ver (6)) é dado por

$$R(t) = [x_1(t); x_2(t)].$$

onde

$$\begin{aligned} t &= \frac{2\sqrt{1-x_1}}{\lambda_2 x_1} - \frac{2\lambda_1 x_1 \ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_1 \sqrt{1-x_1})}{\lambda_2 x_1^2}, \\ x_2(t) &= x_0 e^{-\lambda_1 t}; \\ x_2(t) &= x_0 e^{-\lambda_1 t}; \end{aligned}$$

Temos que $x = 0$ é assintoticamente estável para o problema (9), pois:

1. Nessa inclusão diferencial fuzzy temos que $F(x) = -(\lambda_1 + \lambda_2 u)x$ e portanto $x = 0$ é uma solução de equilíbrio ($F(0) = \chi_{\{0\}}$);
2. F é um operador quasilinear e limitado. Segue da Proposição 1 que F é Fréchet diferenciável e $\mathcal{D}_0(F)(x) = -(\lambda_1 + \lambda_2 u)x$.

Provaremos que $x = 0$ é asintoticamente estável, para algum $\alpha \in [0; 1]$, da inclusão diferencial quasilinear fuzzy

$$x' \in [\mathcal{D}_0(F)(x)]^\alpha. \tag{11}$$

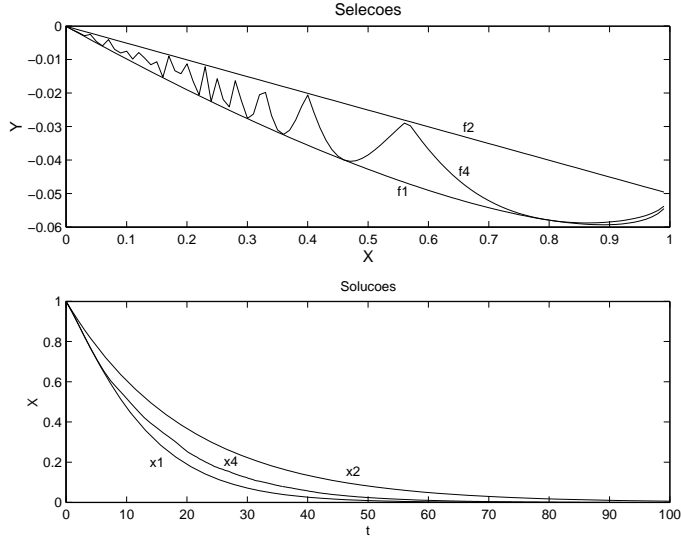


Figura 1: Gráfico das seleções e do conjunto atingível para $\lambda_1 = 0.05$, $\lambda_2 = 0.001$ e $r_0 = 50$.

Tomemos $\alpha = (\frac{1}{2})^k$, então (11) é dado por

$$x' \in - \left(\lambda_1 + \lambda_2 r_0 \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \right) x \quad (12)$$

1. As soluções de (12) são do tipo $x(t) = x(0) \exp(-(\lambda_1 + a\lambda_2 r_0)t)$, com $a \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$ e existem para todo $t \geq 0$.
2. Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 = \epsilon$ tal que $\|x(t)\| = \|x(0) \exp(-(\lambda_1 + a\lambda_2 r_0)t)\| \leq \|x(0)\| \quad \forall t > 0$.
3. $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$.

Segue daí que $x = 0$ é assintoticamente estável para a inclusão (11). Logo, pelo Teorema 1 temos que $x = 0$ é assintoticamente estável para a inclusão diferencial fuzzy (9), isto é, existe $\sigma > 0$, $k > 0$ e $\delta > 0$ tal que qualquer solução $x(t)$ de (9) satisfaz a desigualdade

$$\|x(t)\| \leq k \|x(0)\| \exp(-\sigma t)$$

para todo $t \geq 0$ se $\|x(0)\| < \delta$.

4 Conclusão

Dado $f(x) = rx$, suponhamos que r seja perturbado por um conjunto fuzzy U obtendo assim, a multifunção fuzzy $F(x) = (r + U)x$. Desta forma, se $0 \in [U]^1$, temos que $f(x) \in [F(x)]^\alpha, \forall \alpha \in [0, 1]$. Então, para qualquer $\alpha(x)$ temos que

$$\begin{cases} x' & \in rx + [U]^{\alpha(x)} \\ X(0) & = X_0, \end{cases}$$

isto é, a solução determinística sempre está no conjunto solução da inclusão diferencial.

Referências

- [1] J.P. Aubin and A. Cellina, Differential Inclusions, Springer-Verlag, New York Tokyo, 1984.
- [2] R.C. Bassanezi and L.C. Barros, A simples model of life expectancy with subjective parameters, Kibernetes: Inter, Journal of Systems and Cybernetics 24, vol. 9, 91-98 (1995).
- [3] Barros, L.C., Bassanezi, R.C. e Tonelli, P.A Fuzzy modelling in population dynamics, Ecological Modelling, 2000, pp. 27-33.
- [4] Y. Chalco-Cano, M.A. Rojas-Medar and A.J.V. Brandão, On the differentiability of fuzzy-valued mappings and the stability of a fuzzy differential inclusion 2001. Submitted to publication.
- [5] Y. Chalco-Cano, M.A. Rojas-Medar and A.J.V. Brandão, Fuzzy quasilinear spaces 2001, preprint.
- [6] V. Krivan and G. Colombo, A non-stochastic approach for modelling uncertainty in population dynamics, Bulletin of Mathematical Biology, 60, 721-751, 1998.

- [7] May, R., Stability in Randomly Fluctuating versus Deterministic Environments, *The American Naturalist*, 1973, pp. 621-650.
- [8] Yuanguo Zhu and Ling Rao, Differential Inclusions for Fuzzy Maps, *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 112, 2000, pp. 257-261.

Um Modelo para a Dispersão de Poluentes em Áreas Alagáveis

G. L. Diniz*

Mat-ICET, UFMT - Cuiabá, MT.

J. F. R. Fernandes†

Densis-FEEC, UNICAMP - Campinas, SP.

J. F. C. A. Meyer‡

DMA-IMEEC, UNICAMP - Campinas, SP.

Resumo

Neste estudo, é descrito um problema de poluição ambiental por produtos impactantes numa região de pantanal. É apresentado um modelo matemático descritivo, justificado pelos usos prévios em função dos fenômenos físicos considerados. É verificada a existência de uma solução no sentido fraco e são propostos métodos numéricos de aproximação.

Palavras-chave: *Poluição em alagados, Dispersão de poluentes, Modelagem matemática.*

1 Introdução

O estudo da dispersão de poluentes, através da modelagem matemática, tem se mostrado bastante eficiente para o estudo de perturbações globais ou mesmo de ecossistemas em particular. Neste sentido, é que se propõe o presente estudo do problema da dispersão de poluentes em regiões de áreas alagáveis, onde o processo de dispersão ocorre em meios distintos como o ar e a água.

*dinizgl@densis.fee.unicamp.br

†jura@densis.fee.unicamp.br

‡joni@ime.unicamp.br

Nas três últimas décadas, a emissão de poluentes industriais no meio ambiente levou a distúrbios do equilíbrio de vários ecossistemas, como a erosão e a contaminação de extensas áreas por metais ferrosos e não-ferrosos, além de outros minerais (Marchuk, 1986).

Isto trouxe a necessidade de estudos e monitoramento dos problemas ambientais, abrindo um promissor campo de trabalho para pesquisadores das mais variadas áreas. Uma vez que as questões ambientais estão fortemente interrelacionadas, não podendo ser tratadas de modo isolado para a busca de soluções viáveis, ou até mesmo satisfatórias.

Desta forma, a proteção ambiental vem ganhando cada vez mais um papel relevante no cenário mundial, principalmente nesta última década, tendo como marco a realização da Conferência Mundial ocorrida no Rio de Janeiro em 1992, a chamada Rio-92.

Se, por um lado, tais estudos ganharam maior destaque pelos órgãos governamentais somente nesta última década, por outro, no meio científico isso já vinha ocorrendo desde a década de 70, como por exemplo, a realização em 1970 do International Environmental Protection Symposium, realizado na antiga Tchecoslováquia e os seguintes com a ampla participação de pesquisadores (Marchuk, 1986).

Em muitas situações, tem acontecido regiões de exploração agro-industrial próximas de áreas de proteção ambiental. Barreiras isoladoras podem ser estabelecidas em terra, de discutível eficiência. No caso de meios aquáticos e aéreos, as barreiras se tornam muito mais difíceis, se não impossíveis.

Assim, poluentes transportados advectivamente viajam invadindo regiões que deveriam ser protegidas das atividades antrópicas. É o caso, por exemplo, de deriva de agroquímicos em lagoas próximas às regiões de plantio, ou das cinzas provenientes de queimadas afetando lagoas e baías, como ocorre, por exemplo, na parte norte do Pantanal Mato-grossense, incluindo, também, o estudo da pulverização por avião de áreas de plantio, vizinhas às áreas alagáveis.

Um estudo integrado do impacto sobre regiões a serem preservadas, próximas a atividades agro-industriais, irá exigir uma modelagem integrada do problema englobando tanto o meio aéreo quanto o aquático, e é o que está se propondo através dos modelos matemáticos apresentados mais adiante.

2 Alguns aspectos da poluição

Na realidade, nosso planeta está repleto de substâncias tóxicas. Muitas delas ocorrem de maneira natural, completamente independentes de qualquer atividade antropogênica, como por exemplo, o vapor de um vulcão em atividade pode conter uma quantidade suficientemente grande de enxofre que não permita o crescimento de plantas nas suas proximidades. Os rios que fluem através das florestas podem tornar-se desoxigenados devido às substâncias orgânicas naturais neles depositadas, as quais ao se decompor, resultam em contaminações semelhantes àsquelas causadas pelos esgotos domésticos. O mercúrio, que existe naturalmente nos oceanos, pode vir a se concentrar nos peixes em níveis que chegariam a alarmar as autoridades de saúde pública (Mellanby, 1982).

No entanto, quando falamos de poluição, geralmente nos referimos à presença de substâncias tóxicas introduzidas pelo homem no meio ambiente. Isto não quer dizer que apenas a poluição causada pelo homem seja nociva, embora muitos de seus atos tenham, freqüentemente, conseqüências mais dramáticas, do que os lentos efeitos dos envenenamentos de origem natural.

Os poluentes persistentes, hoje em dia freqüentemente chamados de “não-biodegradáveis”, mais pela precisão do termo do que por sua elegância, colocam-se como um problema completamente diferente. Quando diluídos a um grau inofensivo, eles podem permanecer no nosso meio ambiente, porém com a possibilidade de serem concentrados, possivelmente por organismos vivos. Além disto, alguns produtos químicos mais persistentes permanecem inalterados indefinidamente, ou têm mudanças extremamente lentas.

Por essas razões, é relevante e válido o temor de que substâncias químicas produzidas pelo homem venham causar poluição global relativamente permanentemente. Embora para alguns isto poderia ser considerado como um exagero, pesquisas recentes*, no entanto, têm demonstrado o nível preocupante a que se chegou.

Em relatório recente (CDC Environ.Health, 2001), o CDC (Centro de Controle e Prevenção de Doenças dos Estados Unidos) divulgou um grave relatório tóxico sobre a exposição humana aos produtos químicos ambientais.

Um estudo recente da Academia Nacional de Ciência dos Estados Unidos (National Research Council/USA, 2000), indica que em cada quatro problemas que afetam o desenvolvimento e comportamento das crianças hoje, um

*vide (Rebouças, 1997)

pode estar relacionado a fatores genéticos e ambientais, incluindo compostos neurotóxicos como chumbo e pesticidas com organofosfatos.

3 O Problema

Para se ter uma primeira noção do processo de transporte e transformação dos poluentes no meio ambiente, apresentamos a figura 1 a seguir. Este processo está relacionado com:

- propriedades físico-químicas dos poluentes;
- processo de transporte no meio ambiente e
- processo de transformação do poluente.

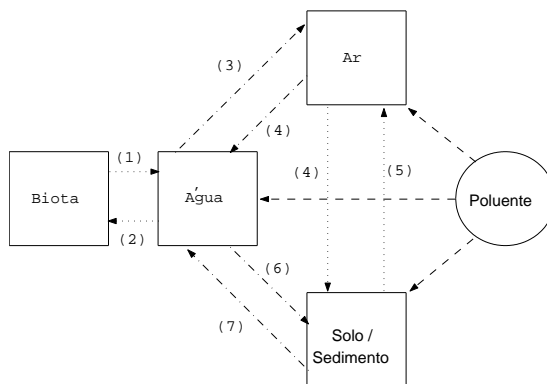


Figura 1: Processo de transporte e transformação do poluente

(1) Excreção/Secreção; (2) Bioacumulação; (3) Evaporação;
(4) Precipitação; (5) Volatilização; (6) Absorção e (7) Diluição -
adaptado de (Connel e Miller, 1984)

Em geral, o tratamento do problema da poluição tem sido considerado somente de modo isolado em cada um dos compartimentos indicados na figura 1, isto é, no ar ou na água ou nos solos/sedimentos ou na biota, sendo que a ênfase depende da área de interesse do pesquisador que está realizando tal modelagem ou estudo.

Neste sentido, o presente trabalho procura levar em consideração, senão de forma completa, pelo menos boa parte dos processos indicados pelo diagrama da figura 1.

Dentre os agroquímicos em geral, será dedicada mais atenção aos pesticidas, devido ao seu alto teor tóxico, o que implica num impacto maior na qualidade ambiental, sobretudo para a biota.

O uso de pesticidas na agricultura tem possibilitado ao agricultor a produção de alimentos a um custo menor. Assim como os fertilizantes, os pesticidas têm substituído a mão-de-obra e os equipamentos, no trato com a lavoura para o controle de pragas. Primariamente, têm sua aplicação na produção de grãos e de algodão, sendo também empregados nos campos de cultivo de hortaliças e frutíferas em geral (Loehr, 1984).

A produção e aplicação de pesticidas, em larga escala, começou por volta dos anos 40, aumentando gradativamente até a década de 70, quando o uso de fungicidas e inseticidas diminuiu, devido a restrições ambientais, enquanto o uso dos herbicidas continuou a crescer (Loehr, 1984).

Uma propriedade importante dos pesticidas é a *solubilidade*, uma característica intrínseca da substância química que nos indica a facilidade com que ela se mistura ao meio líquido, formando um sistema homogêneo (Thibodeaux, 1979), tal propriedade é um dos fatores determinantes no transporte de poluentes no ambiente aquático (Haque et al., 1980).

Quanto à solubilidade no ambiente aquático, de uma maneira geral, podemos classificar os pesticidas em dois grupos principais, a saber:

- (i) os solúveis e
- (ii) os não-solúveis.

Esta classificação faz-se necessária para um melhor tratamento do problema, de modo a obter modelos mais adequados à realidade.

Na descrição dos modelos que serão apresentados a seguir, haverá uma distinção entre dois tipos de poluentes, a saber: **(i)** aqueles que não penetram na água (não-solúveis) e **(ii)** aqueles que penetram na água (solúveis).

3.1 No meio aéreo

Na primeira parte do trabalho aqui proposto, será modelado o transporte aéreo do poluente e seu depósito na superfície da lagoa ou baía[†]. A escolha do domínio se deve a uma suposição inicial de simetria por translação, levando, portanto, à escolha de um domínio bidimensional, conforme ilustrado na figura 2, a seguir.

O plano é escolhido na vertical e contendo o vetor que indica magnitude e direção predominantes do vento na região.

O modelo deverá, então, considerar a difusão do poluente estudado, seu transporte advectivo, seus decaimentos, além das fontes poluidoras e sua penetração no meio aquático, no caso **(ii)**.

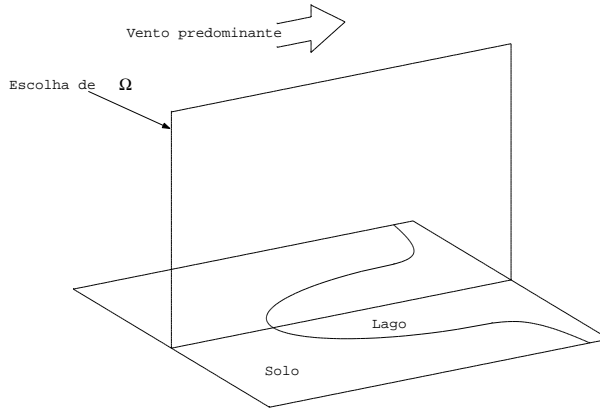


Figura 2: Escolha do domínio para estudo

Denominando $u(x, y, t)$ como sendo a concentração do poluente no ponto (x, y) , para o instante t , a equação que modela o processo, descrito acima, de dispersão efetiva do poluente, no domínio aéreo indicado na figura 2, pode ser dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_u \nabla u) + \operatorname{div}(\vec{V}u) + \sigma_u u = f \quad (3.1)$$

[†]Usa-se, no escopo deste trabalho, a terminologia lagoa ou baía no sentido de indicar corpos aquáticos de baixa circulação

$$\text{onde} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_u = \alpha_u(u, y, t), \\ (\text{é a difusibilidade efetiva no meio aéreo}) \\ \vec{V} = \langle v_1(x, y, t); v_2(x, y, t) \rangle \\ \text{com} \quad \text{div}(\vec{V}) = 0 \\ \sigma_u \quad (\text{é o decaimento no meio aéreo}) \\ f \quad (\text{é o termo fonte}) \end{array} \right.$$

Desta forma, o domínio[†] Ω (descrito pela figura 3) a ser considerado neste problema de valor de contorno, bem como as condições de contorno, serão genericamente indicadas por:

$$\alpha_u \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_0} = g \quad (\text{local de entrada de poluente no domínio}) \quad (3.2)$$

$$-\alpha_u \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_1} = k_1 u \quad (\text{penetração de poluente no solo}) \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_2} = 0 \quad (\text{sem saída de poluente para o meio aquático}) \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_3} = 0 \quad (\text{condição natural de simetria}) \text{ e} \quad (3.5)$$

$$u \Big|_{\Gamma_4} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{altura escolhida convenientemente distante para} \\ \text{que se possa considerar a inexistência de poluente} \end{array} \right) \quad (3.6)$$

3.2 Inclusão do Meio Aquático

Em segunda aproximação, inclui-se o meio aquático, no caso de substâncias poluentes que penetram na água. Neste caso, além da concentração de poluente no ar, indicado por $u(x, y, t)$, será designado por $a(x, y, t)$ a concentração do poluente na água no ponto (x, y) , para o instante t , na parte do domínio a

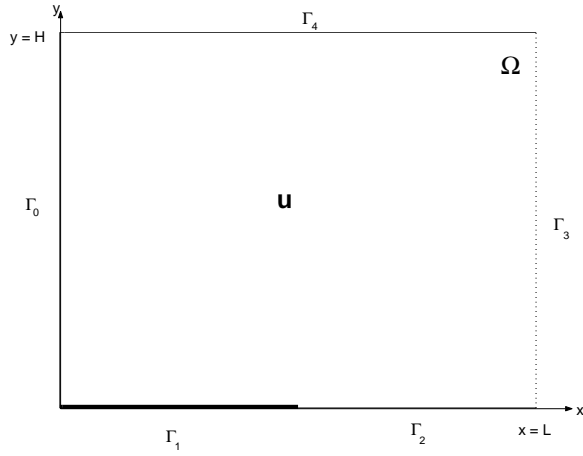


Figura 3: Descrição do domínio Ω de estudo
 $\Omega = (0, L) \times (0, H) \subset \mathbb{R}^2$

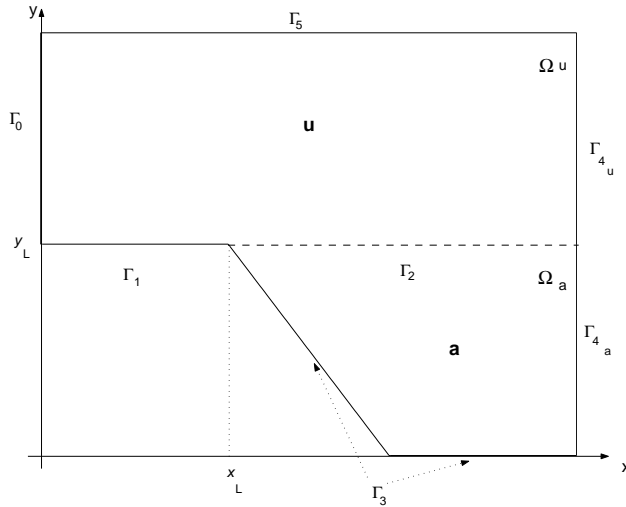


Figura 4: Incluindo o meio aquático no domínio de estudo

ser considerada (ver figura 4), bem como as condições de contorno, que neste

novos casos, passam a ser:

$$\alpha_u \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_0} = g \quad (3.7)$$

$$-\alpha_u \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_1} = k_1 u \quad (3.8)$$

$$-\alpha_u \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_2} = \beta_{12}(u - a) \Big|_{\Gamma_2} \quad (3.9)$$

$$-\alpha_a \frac{\partial a}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_3} = k_3 a \quad (\text{penetração do poluente no sedimento}) \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_{4u}} = \frac{\partial a}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_{4a}} = 0 \quad (\text{condição de estabilidade assintótica}) \quad (3.11)$$

$$u \Big|_{\Gamma_5} = 0 \quad (\text{como em 3.6}) \quad (3.12)$$

$$-\alpha_a \frac{\partial a}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_2} = \beta_{21}(a - u) \Big|_{\Gamma_2} \quad (\text{passagem de poluente ar/água}) \quad (3.13)$$

A equação de continuidade do poluente no meio aquático é dada por:

$$\frac{\partial a}{\partial t} - \alpha_a \Delta a + \text{div}(\vec{\mathbf{W}}a) + \sigma_a a = \mathcal{F} \quad (3.14)$$

onde $\begin{cases} \alpha_a, & (\text{é a constante de difusibilidade efetiva no meio aquático}) \\ \vec{\mathbf{W}}, & (\text{é o campo de velocidade em } \Omega_a) \\ \sigma_a & (\text{é o decaimento global no meio aquático}) \end{cases}$

[‡] $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ sendo que $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ e Γ_4 são disjuntos

$$\mathcal{F} = \begin{cases} A_0 e^{-\kappa t} & \text{se } (x, y) = (x_L, y_L) \\ 0 & \text{se } (x, y) \neq (x_L, y_L) \end{cases} \quad \forall t \in [0, T]$$

A escolha de \mathcal{F} acima se deu, considerando que haja um acúmulo do poluente na fronteira Γ_1 e que o mesmo seja transportado pelos afluentes até o ponto de descarga no meio aquático - ponto (x_L, y_L) do domínio - tal como o efeito “*run off*”, no caso de campos de cultivo de arroz em várzea, comum em áreas alagáveis.

Estas equações é que constituem a chamada formulação clássica ou “forte” do problema. Tendo em vista a necessidade de demonstrar e obter, de algum modo, a existência e unicidade de solução do problema, bem como, visando a aplicação do método de Elementos Finitos, via Petrov/Galerkin para a discretização espacial, que dará as aproximações numéricas adequadas da solução para cada instante $t \in [0, T]$ faz-se necessária a obtenção da formulação variacional ou “fraca” do problema.

A formulação fraca é preferível visto que permite uma maior amplitude de ação tanto do analista (existência e unicidade de solução) quanto do analista numérico (algoritmos computacionais).

4 Formulação variacional

A formulação variacional do modelo consiste em obter uma outra formulação das equações 3.1 e 3.14, cuja solução, denominada solução fraca, deve ser procurada num espaço métrico conveniente. A justificativa de tal procedimento está na possibilidade de se poder usar funções que comportem modelos de descontinuidade por exemplo, para a função que modela alguns dos fenômenos presentes no problema, como no caso de fontes pontuais no domínio, típico de problemas como o que foi proposto neste estudo, ou “manchas” de poluentes.

O processo para obtenção da formulação variacional, é desenvolvido da seguinte forma:

1. Considerar as derivadas de 3.1–3.14 no sentido de distribuições;
2. efetuar o produto interno de cada termo das equações por uma função ν , denominada função teste, sendo esta pertencente a um subespaço conveniente de $H^1(\Omega)$, que será denotado por \mathcal{V} (caracterizado mais adiante),

sendo tal produto interno definido da seguinte forma:

$$\left(f \middle| g \right) \bigg|_{0;\Omega} \doteq \iint_{\Omega} f \cdot g \, d\mu;$$

$$\left\langle f \middle| g \right\rangle \bigg|_{0;\Gamma} \doteq \int_{\Gamma} f \cdot g \, d\gamma.$$

cuja integração é feita no sentido de Lebesgue.

Neste caso, serão procuradas as soluções $u(\mathcal{X}, t)$ e $a(\mathcal{X}, t)$, respectivamente, em \mathcal{V} e \mathcal{W} , dados por:

$$\mathcal{V} = \{ \nu \in \mathcal{L}^2[(0, T], H^1(\Omega_u)] : \nu = 0 \text{ em parte de } \Gamma(\Gamma_4 \text{ ou } \Gamma_5), \forall t \in [0, T] \}$$

$$\mathcal{W} = \{ \omega \in \mathcal{L}^2[(0, T], H^1(\Omega_a)] : \omega = 0 \text{ em parte de } \Gamma(\Gamma_5), \forall t \in [0, T] \}$$

Os subespaços \mathcal{V} e \mathcal{W} serão caracterizados, adiante, de forma mais específica para cada um dos casos considerados nas seções 3.1 e 3.2, apresentados anteriormente.

4.1 No meio aéreo

Considerando as equações apresentadas na seção 3.1 será obtida, a seguir, a formulação variacional para o caso dos poluentes não-solúveis, conforme comentado na seção prévia, caracterizando o subespaço \mathcal{V}_1 de $H^1(\Omega)$, como se segue:

$$\mathcal{V}_1 = \{ \nu \in \mathcal{L}^2[(0, T), H^1(\Omega_u)] : \nu = 0 \text{ em } \Gamma_4 \forall t \in [0, T] \}$$

Neste caso, tomando f genérica, com a entrada (por deriva) de poluente pela fronteira Γ_0 e, além disso, considerando o coeficiente de difusão aérea α_u variável com relação somente à altura y , tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_u(y) \nabla u) + \operatorname{div}(\vec{V}u) + \sigma_u u = f \quad (4.15)$$

Assim, realizando o produto interno conveniente, vem:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \nu \, d\mu - \iint_{\Omega} \nabla(\alpha_u(y) \nabla u) \nu \, d\mu + \iint_{\Omega} \nabla(\vec{V}u) \nu \, d\mu \\ & + \iint_{\Omega} \sigma_u u \nu \, d\mu = \iint_{\Omega} f \nu \, d\mu \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_1, \forall t \in (0, T] \end{aligned} \quad (4.16)$$

Desta forma, considerando funções e derivadas primeiras de quadrado integráveis, no sentido fraco, e tomando $\vec{V} = \langle V_1(y); -V_2 \rangle$ (conforme justificativa adiante), obtém-se:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \nu d\mu - \iint_{\Omega} \nabla(\alpha_u(y) \nabla u) \nu d\mu + \iint_{\Omega} V_1(y) \frac{\partial u}{\partial x} \nu d\mu \\ - V_2 \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \nu d\mu + \iint_{\Omega} \sigma_u u \nu d\mu = \iint_{\Omega} f \nu d\mu \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\forall \nu \in \mathcal{V}_1, \forall t \in (0, T]$$

ao fazer uso de um teorema do tipo Green, aplicado no segundo termo do lado esquerdo da equação 4.17, vem:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \nu d\mu + \iint_{\Omega} \alpha_u(y) \nabla u \nabla \nu d\mu + \iint_{\Omega} V_1(y) \frac{\partial u}{\partial x} \nu d\mu \\ - V_2 \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \nu d\mu + \iint_{\Omega} \sigma_u u \nu d\mu - \int_{\Gamma} \alpha_u(y) \frac{\partial u}{\partial \eta} \nu d\gamma = \iint_{\Omega} f \nu d\mu \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\forall \nu \in \mathcal{V}_1, \forall t \in (0, T]$$

Daí, supondo uma variação linear crescente no coeficiente de difusão, ou seja:

$$\alpha_u(y) = \alpha_0 + \alpha_u y, \alpha_u, \alpha_0 > 0 ; y \in [0, H]$$

e \vec{V} dado por:

$$\vec{V} = \langle V_1 y^2 ; -V_2 \rangle$$

onde $V_1 y^2$ é a componente horizontal resultante da deriva pelo vento predominante para uma primeira aproximação e V_2 é a componente vertical da velocidade resultante da ação gravitacional, supondo a resistência do ar linearmente proporcional à velocidade, de modo que seja plausível a aproximação (V_{∞}), assintoticamente, desta componente por uma constante, daí a equação (4.18) se torna:

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \nu d\mu + \iint_{\Omega} (\alpha_0 + \alpha_u y) \nabla u \nabla \nu d\mu + V_1 \iint_{\Omega} y^2 \frac{\partial u}{\partial x} \nu d\mu \\
& - V_2 \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \nu d\mu + \sigma_u \iint_{\Omega} u \nu d\mu - \int_{\Gamma} (\alpha_0 + \alpha_u y) \frac{\partial u}{\partial \eta} \nu d\gamma \\
& = \iint_{\Omega} f \nu d\mu \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_1, \forall t \in (0, T]
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Finalmente, considerando as condições de contorno (Brooks e Hughes, 1982) dadas por (3.2–3.6), substituindo no último termo do lado esquerdo da eq. (4.19), vem:

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \nu d\mu + \iint_{\Omega} (\alpha_0 + \alpha_u y) \left(\nabla u \nabla \nu \right) d\mu + V_1 \iint_{\Omega} y^2 \frac{\partial u}{\partial x} \nu d\mu \\
& - V_2 \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \nu d\mu + \sigma_u \iint_{\Omega} u \nu d\mu + k_1 \int_{\Gamma_1} u \nu d\gamma \\
& = \int_{\Gamma_0} g \nu d\gamma + \iint_{\Omega} f \nu d\mu \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_1, \forall t \in (0, T]
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Agora, usando a notação para o produto interno definida anteriormente nesta seção, a equação 4.20 pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial u}{\partial t} \middle| \nu \right) \Big|_{0;\Omega} + \left((\alpha_0 + \alpha_u y) \nabla u \middle| \nabla \nu \right) \Big|_{0;\Omega} + V_1 \left(y^2 \frac{\partial u}{\partial x} \middle| \nu \right) \Big|_{0;\Omega} \\
& - V_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \middle| \nu \right) \Big|_{0;\Omega} + \sigma_u \left(u \middle| \nu \right) \Big|_{0;\Omega} + k_1 \left\langle u \middle| \nu \right\rangle \Big|_{0;\Gamma_1} \\
& = \left\langle g \middle| \nu \right\rangle \Big|_{0;\Gamma_0} + \left(f \middle| \nu \right) \Big|_{0;\Omega} \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_1, \forall t \in (0, T]
\end{aligned} \tag{4.21}$$

É importante observar que em (4.20) aparecem apenas as derivadas de primeira ordem, no sentido de distribuições ou “fraca”, da solução $u(x, y, t)$, enquanto na equação (3.1) aparecem as derivadas de segunda ordem, no sentido clássico.

Desta forma, passando dessa formulação clássica (3.1-3.6) para a formulação variacional (4.20), são enfraquecidas as hipóteses de regularidade da solução, o que proporciona um aumento da classe de funções para as quais o problema faz sentido.

Além disso, na formulação variacional, a demonstração de existência e unicidade da solução fraca se torna bem mais simples e, hoje, viável em comparação com a da solução clássica, cuja demonstração será tratada na próxima seção.

4.2 Existência e unicidade de solução

Considerando a formulação variacional obtida na seção prévia, será obtida a existência e unicidade da solução para a equação (4.20), de acordo com o que se segue.

Para estabelecer a existência e unicidade da solução de (4.20), será utilizado o Lema de Lax-Milgram (Lions, 1961, Teor. 1.1.3 - Cap. I, pg.8), observando que este problema na sua formulação variacional (eq. 4.20) satisfaz as hipóteses do citado teorema, seguindo o procedimento adotado, por exemplo, em (Diniz, 1994), (Castro, 1993) e (Mistro, 1992).

De fato, agrupando termos de (4.20) na forma abaixo e introduzindo a notação usada no referido teorema (Lions, 1961), tem-se:

$$\hat{A}(t; \bullet) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{ij}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(x, t) + A_0 \quad (4.22)$$

o que, em (4.20) mediante as escolhas indicadas mais abaixo, fornece:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \hat{A}(t; u) \nu d\mu + \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \nu d\mu + k_1 \int_{\Gamma_1} u \nu d\gamma \\ &= \int_{\Gamma_0} g \nu d\gamma + \iint_{\Omega} f \nu d\mu + \left(\iint_{\Omega} u_0 \nu d\mu \right) \delta_0(t) \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\forall \nu \in \mathcal{V}_1, \forall t \in (0, T)$$

dadas as escolhas em (4.23) de:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_u y & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \\ A_i &= \begin{cases} V_1 y^2 & \text{se } i = 1 \\ -V_2 & \text{se } i = 2 \end{cases} \\ A_0 &= \sigma_u \end{aligned}$$

lembrando que δ_0 é o operador de Dirac que “fixa” a condição inicial.

Para a demonstração de existência e unicidade da solução, basta verificar que (4.23) satisfaz as hipóteses do citado teorema.

4.3 Discretização do problema

Nesta seção, será feita a discretização do modelo, para a formulação obtida na seção 4 (eq. 4.20), através do Método dos Elementos Finitos (discretização espacial) e Crank-Nicolson (discretização temporal), descritos a seguir.

O primeiro passo da discretização, no caso a espacial, será via Método dos Elementos Finitos. Este método é uma técnica geral para construção de aproximações da solução de um problema de valor de contorno, que envolve a divisão do domínio da solução num número finito de subdomínios simples (os Elementos Finitos) e usando conceitos variacionais, construir uma aproximante da solução sobre a coleção de Elementos Finitos, (Becker et al., 1981); (Carey e Oden, 1981)).

O segundo passo, será o da discretização da variável temporal (no caso, Crank-Nicolson), optou-se por um método implícito com diferenças centradas (Carnahan et al., 1969), (Kardestuncer e Norrie, 1987), de modo a transformar os modelos, discretizados espacialmente, num sistema de equações algébricas lineares implicitamente definido (Sossae, 1995); (Diniz, 1994); (Castro, 1993) e (Mistro, 1992).

Para isso, deve-se trabalhar com a formulação variacional do problema, dada pela equação (4.20). Denominando de \mathcal{V}_{h_1} o subespaço de \mathcal{V} gerado pelas N_{h_1} funções φ_i (chamadas de funções teste). Assim, $\forall \nu_{h_1} \in \mathcal{V}_{h_1}$ é da forma:

$$\nu_{h_1} = \sum_{j=1}^{N_{h_1}} \nu_j(t) \varphi_j(x, y)$$

Neste modelo, como o processo de dispersão se dá apenas no ar, será feita a discretização do domínio aéreo (Ω), considerando o subespaço \mathcal{V}_{h_1} de \mathcal{V}_1 , a

eq. (4.20) pode ser reescrita na forma do seguinte sistema de EDO's:

$$\begin{aligned}
& \left(\widehat{A}(t; u_h) \Big| \nu_h \right) \Big|_{0; \Omega} + \left(\frac{\partial u_h}{\partial t} \Big| \nu_h \right) \Big|_{0; \Omega} \\
& + k_1 \left\langle u_h \Big| \nu_h \right\rangle \Big|_{0; \Gamma_1} = \left\langle g \Big| \nu_h \right\rangle \Big|_{0; \Gamma_0} + \left(f \Big| \nu_h \right) \Big|_{0; \Omega} \\
& \forall \nu_h \in \mathcal{V}_{h_1}, \forall t \in (0, T)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

o que, mediante as escolhas de A_{ij} , A_i e A_0 indicadas anteriormente, nos fornece o seguinte sistema de EDO's discretizado:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{N_{h_1}} \frac{du_j}{dt} \iint_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\mu + \sum_{j=1}^{N_{h_1}} u_j \iint_{\Omega} (\alpha_0 + \alpha_u y) \left(\nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \right) d\mu \\
& + V_1 \sum_{j=1}^{N_{h_1}} u_j \iint_{\Omega} y^2 \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \varphi_i \right) d\mu - V_2 \sum_{j=1}^{N_{h_1}} u_j \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \varphi_i \right) d\mu \\
& + \sigma_u \sum_{j=1}^{N_{h_1}} u_j \iint_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\mu + k_1 \sum_{j \in \Gamma_1} u_j \int_{\Gamma_1} \varphi_j \varphi_i d\gamma = \\
& = \int_{\Gamma_0} g \varphi_i d\gamma + \iint_{\Omega} \left(f \varphi_i \right) d\mu \quad \forall \varphi_i \text{ da base de } \mathcal{V}_{h_1}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

A discretização seguinte é a da variável temporal, isso será feito pelo método de Crank-Nicolson, com diferenças centradas em $t_n + \frac{\Delta t}{2}$, fazendo as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned}
& \frac{du_j}{dt} \left(t_n + \frac{\Delta t}{2} \right) \cong \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \\
& \text{onde} \quad u_j^{n+1} = u_j(t_{n+1})
\end{aligned} \tag{4.26}$$

e

$$u_j \left(t_n + \frac{\Delta t}{2} \right) \cong \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} \tag{4.27}$$

daí, levando (4.26) e (4.27) em (4.25), obtem-se o sistema linear

$$\mathcal{A}u^{(n+1)} = \mathcal{B}u^{(n)} + d^{n+\frac{1}{2}}, \quad \text{dado} \quad u^{(0)} \tag{4.28}$$

onde

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \sigma_u\right) \iint_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\mu + \frac{\Delta t}{2} \iint_{\Omega} (\alpha_0 + \alpha_u y) (\nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i d\mu) \\
&\quad + V_1 \frac{\Delta t}{2} \iint_{\Omega} y^2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \varphi_i d\mu - V_2 \frac{\Delta t}{2} \iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \varphi_i d\mu + k_1 \int_{\Gamma_1} \varphi_j \varphi_i d\gamma \\
b_{ij} &= \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \sigma_u\right) \iint_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\mu - \frac{\Delta t}{2} \iint_{\Omega} (\alpha_0 + \alpha_u y) \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i d\mu \\
&\quad - V_1 \frac{\Delta t}{2} \iint_{\Omega} y^2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \varphi_i d\mu + V_2 \frac{\Delta t}{2} \iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \varphi_i d\mu - k_1 \int_{\Gamma_1} \varphi_j \varphi_i d\gamma \\
d_i^{n+\frac{1}{2}} &= \iint_{\Omega} \left(f(t_{n+\frac{\Delta t}{2}}, \cdot) \varphi_i\right) d\mu + \int_{\Gamma_0} g(t_{n+\frac{\Delta t}{2}}, \cdot) \varphi_i d\gamma \\
(u^{(0)}|\varphi_i) &= \sum_{j=1}^{N_{h_1}} u_j^{(0)} (\varphi_j|\varphi_i) \quad i = 1, 2, \dots, N_{h_1}
\end{aligned}$$

A matriz \mathcal{A} é chamada matriz de rigidez e o vetor resultante das operações $\mathcal{B}.u^{(n)} + d^{n+\frac{1}{2}}$, para cada instante $t_{n+\frac{\Delta t}{2}}$, é denominado vetor carga.

A ordem das aproximações temporais é, localmente, $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ e a escolha das funções teste φ_i será a de elementos finitos triangulares de primeira ordem.

Desta forma, obtém-se uma função “pirâmide” sobre cada nó, que é linear por partes, assumindo o valor 1 no j -ésimo nó e ZERO nos demais (ver figura 5).

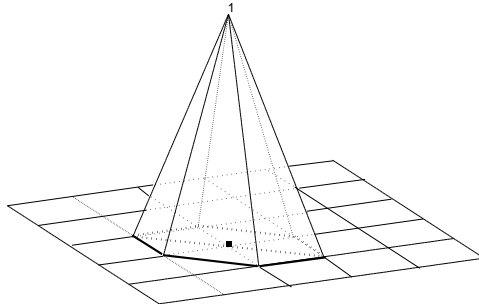


Figura 5: Ilustração da função base φ_i para o j -ésimo nó

A função esboçada na figura 5 é obtida a partir da definição por partes, em cada triângulo da discretização do domínio, onde são definidas localmente

(num triângulo de referência), três funções base, ou seja, uma para cada vértice do triângulo de referência, que assume o valor UM no i -ésimo vértice e ZERO nos outros dois, propriedade esta exigida para as candidatas à função base.

5 Formulação variacional incluindo o meio aquático

Nesta seção, será considerado o problema dos poluentes que penetram na água (solúveis), o que implica na reformulação do domínio conforme apresentado na figura 4 (pg.114), bem como as novas condições de contorno (Brooks e Hughes, 1982), estabelecidas pelas equações (3.1 e 3.7 a 3.13) da seção 3.2, para a obtenção da formulação variacional no caso dos poluentes solúveis.

Para este problema, os subespaços \mathcal{V}_{2_u} e \mathcal{V}_{2_a} de $H^1(\Omega = \Omega_u \cup \Omega_a)$, serão caracterizados da seguinte forma:

$$\mathcal{V}_{2_u} = \{ \nu \in \mathcal{L}^2[(0, T), H^1(\Omega_u)] : \nu = 0 \text{ em } \Gamma_5 \forall t \in [0, T] \}$$

$$\mathcal{V}_{2_a} = \{ \nu \in \mathcal{L}^2[(0, T), H^1(\Omega_a)] : \nu = 0 \text{ em } \Gamma_5 \forall t \in [0, T] \}$$

Neste caso, conforme denominado anteriormente, sendo $u(x, y, t)$ e $a(x, y, t)$ as concentrações do poluente nos meios aéreo e aquático, respectivamente, o sistema de equações resulta em:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla(\alpha_u \nabla u) + \nabla(\vec{V}u) + \sigma_u u = f \\ \frac{\partial a}{\partial t} - \alpha_a \Delta a + \nabla(\vec{W}a) + \sigma_a a = \mathcal{F} \end{cases} \quad (5.29)$$

Daí, aplicando o produto interno indicado na seção 4 em cada termo do sistema 5.29, vem:

$$\begin{cases} \iint_{\Omega_u} \frac{\partial u}{\partial t} \nu d\mu - \iint_{\Omega_u} \nabla[(\alpha_u(y) \nabla u) \nu] d\mu + \iint_{\Omega_u} \nabla(\vec{V} \cdot u) \nu d\mu \\ \quad + \iint_{\Omega_u} \sigma_u u \nu d\mu = \iint_{\Omega_u} f \nu d\mu, & \forall \nu \in \mathcal{V}_{2_u} \\ \iint_{\Omega_a} \frac{\partial a}{\partial t} \nu d\mu - \iint_{\Omega_a} \alpha_a \Delta a \nu d\mu + \iint_{\Omega_a} \nabla(\vec{W} \cdot a) \nu d\mu \\ \quad + \iint_{\Omega_a} \sigma_a a \nu d\mu = \iint_{\Omega_a} \mathcal{F} \nu d\mu & \forall \nu \in \mathcal{V}_{2_a}, \forall t \in (0, T] \end{cases} \quad (5.30)$$

Novamente, considerando funções e derivadas primeiras de quadrado integráveis, no sentido fraco, tomando $\vec{V} = \langle V_1 y^2; -V_2 \rangle$, $\vec{W} = \langle W_1; -W_2 \rangle$ e f genérica (como em (4.19) da seção 4) obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{\Omega_u} \frac{\partial u}{\partial t} \nu d\mu - \iint_{\Omega_u} \nabla [(\alpha_u(y) \nabla u) \nu] d\mu + V_1 \iint_{\Omega_u} y^2 \frac{\partial u}{\partial x} \nu d\mu \\ - V_2 \iint_{\Omega_u} \frac{\partial u}{\partial y} \nu d\mu + \iint_{\Omega_u} \sigma_u u \nu d\mu = \iint_{\Omega_u} f \nu d\mu, \\ \iint_{\Omega_a} \frac{\partial a}{\partial t} \nu d\mu - \alpha_a \iint_{\Omega_a} \Delta a \nu d\mu + \iint_{\Omega_a} \left(W_1 \frac{\partial a}{\partial x} - W_2 \frac{\partial a}{\partial y} \right) \nu d\mu \\ + \iint_{\Omega_a} \sigma_a a \nu d\mu = \iint_{\Omega_a} \mathcal{F} \nu d\mu \end{array} \right. \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_{2_u} \quad (5.31)$$

tomando os coeficientes de difusão no ar (Ω_u) e na água (Ω_a), respectivamente, por:

$$\alpha_u(y) = \alpha_0 + \alpha_u y, \quad \alpha_0, \alpha_u > 0; \quad y \in [0, Y] \quad e \alpha_a \text{ constante}$$

daí, fazendo uso de um teorema do tipo Green, aplicado no segundo termo do lado esquerdo de cada uma das equações do sistema 5.31, vem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{\Omega_u} \frac{\partial u}{\partial t} \nu d\mu + \iint_{\Omega_u} (\alpha_0 + \alpha_u y) [\nabla u \cdot \nabla \nu] d\mu \\ + V_1 \iint_{\Omega_u} y^2 \frac{\partial u}{\partial x} \nu d\mu - V_2 \iint_{\Omega_u} \frac{\partial u}{\partial y} \nu d\mu + \sigma_u \iint_{\Omega_u} u \nu d\mu \\ - \int_{\partial \Omega_u} (\alpha_0 + \alpha_u y) \frac{\partial u}{\partial \eta} \nu d\gamma = \iint_{\Omega_u} f \nu d\mu \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_{2_u} \\ \iint_{\Omega_a} \frac{\partial a}{\partial t} \nu d\mu + \alpha_a \iint_{\Omega_a} [\nabla a \cdot \nabla \nu] d\mu \\ + \iint_{\Omega_a} \left[W_1 \frac{\partial a}{\partial x} - W_2 \frac{\partial a}{\partial y} \right] \nu d\mu + \iint_{\Omega_a} \sigma_a a \nu d\mu \\ - \alpha_a \int_{\partial \Omega_a} \frac{\partial a}{\partial \eta} \nu d\gamma = \iint_{\Omega_a} \mathcal{F} \nu d\mu \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_{2_a}, \forall t \in (0, T] \end{array} \right. \quad (5.32)$$

Por fim, considerando as condições de contorno dadas pelas equações (3.7–

3.13) e levando-as no sistema 5.32, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{\Omega_u} \frac{\partial u}{\partial t} \nu d\mu + \iint_{\Omega_u} (\alpha_0 + \alpha_u y) [\nabla u \cdot \nabla \nu] d\mu \\ + V_1 \iint_{\Omega_u} y^2 \frac{\partial u}{\partial x} \nu d\mu - V_2 \iint_{\Omega_u} \frac{\partial u}{\partial y} \nu d\mu + k_1 \int_{\Gamma_1} u \nu d\gamma \\ + \sigma_u \iint_{\Omega_u} u \nu d\mu - \int_{\Gamma_0} g \nu d\gamma \\ + \beta_{12} \int_{\Gamma_2} (u - a) \nu d\gamma = \iint_{\Omega_u} f \nu d\mu \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_{2_u} \\ \iint_{\Omega_a} \frac{\partial a}{\partial t} \nu d\mu + \alpha_a \iint_{\Omega_a} [\nabla a \cdot \nabla \nu] d\mu + \sigma_a \iint_{\Omega_a} a \nu d\mu \\ + \iint_{\Omega_a} \left[W_1 \frac{\partial a}{\partial x} - W_2 \frac{\partial a}{\partial y} \right] \nu d\mu + \beta_{21} \int_{\Gamma_2} (a - u) \nu d\gamma \\ + k_3 \int_{\Gamma_3} a \nu d\gamma = \iint_{\Omega_a} \mathcal{F} \nu d\mu \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_{2_a}, \forall t \in (0, T] \end{array} \right. \quad (5.33)$$

que, após a separação das incógnitas, se torna:

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{\Omega_u} \frac{\partial u}{\partial t} \nu d\mu + \iint_{\Omega_u} (\alpha_0 + \alpha_u y) [\nabla u \cdot \nabla \nu] d\mu \\ + V_1 \iint_{\Omega_u} y^2 \frac{\partial u}{\partial x} \nu d\mu - V_2 \iint_{\Omega_u} \frac{\partial u}{\partial y} \nu d\mu + \sigma_u \iint_{\Omega_u} u \nu d\mu \\ + k_1 \int_{\Gamma_1} u \nu d\gamma + \int_{\Gamma_2} \beta_{12} u \nu d\gamma = \iint_{\Omega_u} f \nu d\mu \\ + \beta_{12} \int_{\Gamma_2} a \nu d\gamma + \int_{\Gamma_0} g \nu d\gamma \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_{2_u} \\ \iint_{\Omega_a} \frac{\partial a}{\partial t} \nu d\mu + \alpha_a \iint_{\Omega_a} [\nabla a \cdot \nabla \nu] d\mu + \iint_{\Omega_a} \sigma_a a \nu d\mu \\ + \iint_{\Omega_a} \left[W_1 \frac{\partial a}{\partial x} - W_2 \frac{\partial a}{\partial y} \right] \nu d\mu + \beta_{21} \int_{\Gamma_2} a \nu d\gamma + \int_{\Gamma_3} k_3 a \nu d\gamma \\ = \beta_{21} \int_{\Gamma_2} u \nu d\gamma + \iint_{\Omega_a} \mathcal{F} \nu d\mu; \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_{2_a}, \forall t \in (0, T] \end{array} \right. \quad (5.34)$$

Como observado anteriormente, em (5.34) aparecem apenas as derivadas de primeira ordem, no sentido de distribuições, da solução $a(x, y, t)$, enquanto na equação (3.14) aparecem as derivadas de segunda ordem, no sentido clássico.

Passando da formulação clássica (3.1 e 3.14) para a variacional (5.34), as hipóteses de regularidade da solução são enfraquecidas, o que proporciona um aumento na classe de funções para as quais o problema faz sentido.

5.1 Existência e unicidade - com o meio aquático

De acordo com a formulação variacional obtida na seção anterior, tem-se a existência e unicidade da solução para o sistema (5.34), utilizando o Teorema de Lions (Lions, 1961, Cap. IV), para obter a existência e unicidade de solução para o problema na sua formulação variacional, basta verificar que a eq. 5.34 satisfaz as hipóteses do citado teorema.

5.2 Discretização incluindo o meio aquático

Nesta seção, será feita a discretização do modelo, para a formulação obtida na seção 5 (eq. 5.34), através do Método dos Elementos Finitos (discretização espacial) e Crank-Nicolson (discretização temporal), conforme descrito anteriormente.

Para isso, deve-se trabalhar com a formulação variacional do problema, dada pela equação (5.34). Denominando de $\mathcal{V}_{h_{2u}}$ e $\mathcal{V}_{h_{2a}}$ os subespaços de \mathcal{V}_{2u} e \mathcal{V}_{2a} , respectivamente, gerado pelas $N_{h_{2u}}$ e $N_{h_{2a}}$ funções φ_i (chamadas de funções teste). Assim, $\forall \nu_{h_{2\bullet}} \in \mathcal{V}_{h_{2u}}$ e $\mathcal{V}_{h_{2a}}$ são da forma:

$$\nu_{h_{2u}} = \sum_{i=1}^{N_{h_{2u}}} \nu_i(t) \varphi_i(x, y) \quad \nu_{h_{2a}} = \sum_{i=1}^{N_{h_{2a}}} \nu_i(t) \varphi_i(x, y)$$

Neste modelo, o processo de dispersão ocorre em ambos os meios, com isso, será feita a discretização dos domínios aéreo e aquático (Ω_u e Ω_a , respectivamente), considerando os subespaços $\mathcal{V}_{h_{2u}}$ e $\mathcal{V}_{h_{2a}}$, o que fornece para a eq.

(5.34):

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^{N_{h_2}} \frac{\partial u_j}{\partial t} \iint_{\Omega_u} \varphi_j \varphi_i d\mu + \sum_{j=1}^{N_{h_2}} u_j \iint_{\Omega_u} (\alpha_0 + \alpha_u y) (\nabla \varphi_j \nabla \varphi_i) d\mu \\
 & + V_1 \sum_{j=1}^{N_{h_2}} u_j \iint_{\Omega_u} y^2 \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \varphi_i \right) d\mu - V_2 \sum_{j=1}^{N_{h_2}} u_j \iint_{\Omega_u} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \varphi_i \right) d\mu \\
 & + \sigma_u \sum_{j=1}^{N_{h_2}} u_j \iint_{\Omega_u} \varphi_j \varphi_i d\mu + k_1 \sum_{j \in \Gamma_1} u_j \int_{\Gamma_1} \varphi_j \varphi_i d\gamma \\
 & + \beta_{12} \sum_{j \in \Gamma_2} u_j \int_{\Gamma_2} \varphi_j \varphi_i d\gamma = \iint_{\Omega_u} f \varphi_i d\mu + \int_{\Gamma_0} g \varphi_i d\gamma \\
 & + \beta_{12} \sum_{j \in \Gamma_2} a_j \int_{\Gamma_2} \varphi_j \varphi_i d\gamma \quad \forall \varphi_i \in \text{base de } \mathcal{V}_{h_{2u}} \\
 & \sum_{j=1}^{N_{h_2}} \frac{\partial a_j}{\partial t} \iint_{\Omega_a} \varphi_j \varphi_i d\mu + \alpha_a \sum_{j=1}^{N_{h_2}} a_j \iint_{\Omega_a} (\nabla \varphi_j \nabla \varphi_i) d\mu \\
 & + W_1 \sum_{j=1}^{N_{h_2}} a_j \iint_{\Omega_a} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \varphi_i \right) d\mu - W_2 \sum_{j=1}^{N_{h_2}} a_j \iint_{\Omega_a} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \varphi_i \right) d\mu \\
 & + \sigma_a \sum_{j=1}^{N_{h_2}} a_j \iint_{\Omega_a} \varphi_j \varphi_i d\mu + k_3 \sum_{j \in \Gamma_3} a_j \int_{\Gamma_3} \varphi_j \varphi_i d\gamma \\
 & + \beta_{21} \sum_{j \in \Gamma_2} a_j \int_{\Gamma_2} \varphi_j \varphi_i d\gamma = \iint_{\Omega_a} \mathcal{F} \varphi_i d\mu \\
 & + \beta_{21} \sum_{j \in \Gamma_2} u_j \int_{\Gamma_2} \varphi_j \varphi_i d\gamma \quad \forall \varphi_i \in \text{base de } \mathcal{V}_{h_{2a}}
 \end{aligned} \right. \quad (5.35)$$

A figura 6, a seguir, ilustra a discretização do domínio, incluindo os dois meios e apresenta a função base $\varphi_i(x_j, y_j)$ para o j -ésimo nó. Neste caso, também foi escolhida a discretização por elementos triangulares de primeira ordem.

Novamente, via o método de Crank-Nicolson, com diferenças centradas em $t_n + \frac{\Delta t}{2}$, usando as aproximações (4.26) e (4.27) em (5.35), para a discretização

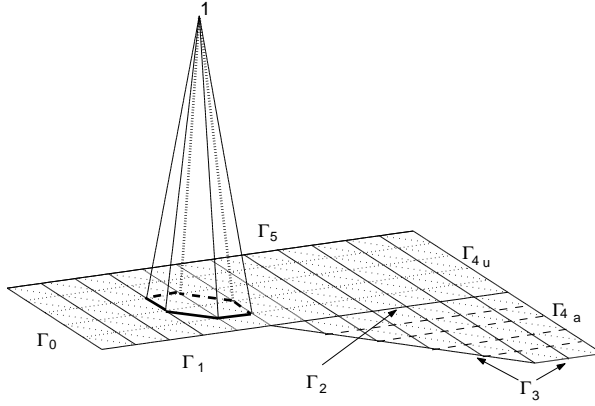


Figura 6: Ilustração da função base $\varphi_i(x, y)$

temporal, obtem-se o sistema linear acoplado:

$$\begin{cases} \mathcal{A}u^{(n+1)} &= \mathcal{B}u^{(n)} + e^{n+\frac{1}{2}} \\ \mathcal{C}u^{(n+1)} &= \mathcal{D}u^{(n)} + p^{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (5.36)$$

dados $u^{(0)}$ e $a^{(0)}$, onde

$$\begin{aligned} a_{ij} = & \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \sigma_u\right) \iint_{\Omega_u} \varphi_j \varphi_i d\mu + \frac{\Delta t}{2} \iint_{\Omega_u} (\alpha_0 + \alpha_u y) \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i d\mu \\ & + V_1 \frac{\Delta t}{2} \iint_{\Omega_u} y^2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \varphi_i d\mu - V_2 \frac{\Delta t}{2} \iint_{\Omega_u} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \varphi_i d\mu + k_1 \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_1} \varphi_j \varphi_i d\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{ij} = & \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \sigma_u\right) \iint_{\Omega_u} \varphi_j \varphi_i d\mu - \frac{\Delta t}{2} \iint_{\Omega_u} (\alpha_0 + \alpha_u y_i) \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i d\mu \\ & - V_1 \frac{\Delta t}{2} \iint_{\Omega_u} y^2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \varphi_i d\mu + V_2 \frac{\Delta t}{2} \iint_{\Omega_u} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \varphi_i d\mu - k_1 \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_1} \varphi_j \varphi_i d\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{ij} = & \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \sigma_a\right) \iint_{\Omega_a} \varphi_j \varphi_i d\mu + \alpha_a \frac{\Delta t}{2} \iint_{\Omega_a} \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i d\mu \\ & + W_1 \frac{\Delta t}{2} \iint_{\Omega_a} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \varphi_i d\mu - W_2 \frac{\Delta t}{2} \iint_{\Omega_a} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \varphi_i d\mu + k_3 \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_1} \varphi_j \varphi_i d\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{ij} &= \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \sigma_a\right) \iint_{\Omega_a} \varphi_j \varphi_i d\mu - \alpha_a \frac{\Delta t}{2} \iint_{\Omega_a} \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i d\mu \\
&\quad - W_1 \frac{\Delta t}{2} \iint_{\Omega_a} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \varphi_i d\mu + W_2 \frac{\Delta t}{2} \iint_{\Omega_a} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \varphi_i d\mu - k_3 \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_1} \varphi_j \varphi_i d\gamma \\
e_i^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{\Delta t}{2} \left(\iint_{\Omega_u} \left(f(t_{n+\frac{\Delta t}{2}}, \bullet) \varphi_i \right) d\mu \right) + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_0} \left(g(t_{n+\frac{\Delta t}{2}}, \bullet) \varphi_i \right) d\gamma \\
&\quad + \beta_{12} \sum_{j \in \Gamma_2} a_j \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_2} \varphi_j \varphi_i d\gamma \\
p_i^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{\Delta t}{2} \left(\iint_{\Omega_a} \mathcal{F}(t_{n+\frac{\Delta t}{2}}, \bullet) \varphi_j \varphi_i d\mu \right) \delta_L(\Omega) + \beta_{21} \sum_{j \in \Gamma_2} u_j \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_2} \varphi_j \varphi_i d\gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(u^{(0)}|\varphi_i) &= \sum_{j=1}^{N_{h_{2a}}} u_j^{(0)}(\varphi_j|\varphi_i) \quad i = 1, 2, \dots, N_{h_{2u}} \\
(a^{(0)}|\varphi_i) &= \sum_{j=1}^{N_{h_{2a}}} a_j^{(0)}(\varphi_j|\varphi_i) \quad i = 1, 2, \dots, N_{h_{2a}}
\end{aligned}$$

e

$\delta_L(\Omega)$ é o operador delta de Dirac.

6 Considerações Finais

O presente modelo deverá ser testado para a situação real de dispersão de agrotóxicos na região de *Esteros del Ibera* (região nordeste da Argentina) - como parte do Projeto INCO-ERB IC18-CT98-0262/Unicamp, denominado “Manejo de Recursos Naturais em Regiões de Pantanal no Mercosul”).

Os códigos numéricos para o problema discretizado, encontram-se em fase de implementação e testes, cujos resultados numéricos deverão constar de futuras publicações.

Neste artigo, o intuito foi descrever o problema, suas formulações clássica e variacional, a existência e unicidade de solução e, por fim, a discretização do problema em sua formulação variacional.

Espera-se com isso, contribuir de alguma forma para o tratamento matemático adequado de um problema ambiental de grande interesse, tanto para estudos de impacto ambiental, quanto para estudos da “qualidade ambiental”.

Referências

- Becker, E. B., Carey, G. F., Oden, J. T., 1981. Finite Elements: an introduction. Vol. 1. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs.
- Brooks, A. N., Hughes, T. J. R., 1982. Streamline upwind/petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on incompressible navier-stokes equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 32, 199–259.
- Carey, G. F., Oden, J. T., 1981. Finite Elements: mathematical aspects. Vol. 4. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs.
- Carnahan, B., Luther, H. A., Wilkes, J. O., 1969. Applied Numerical Methods. John Wiley & Sons, New York.
- Castro, S. P. E., 1993. Modelagem matemática e aproximação numérica do estudo de poluentes no ar. Tese de Mestrado, IMECC - UNICAMP, Campinas/SP.
- Connel, D. W., Miller, G. J., 1984. Chemistry and Ecotoxicology of Pollution. John Wiley & Sons, New York.
- Diniz, G. L., 1994. A mudança no habitat de populações de peixes: De rio a represa - o modelo matemático. Tese de Mestrado, IMECC - UNICAMP, Campinas/SP.
- C. D. C. Environmental Health, 2001. National report on human exposure to environmental chemicals, url: <http://www.cdc.gov/nceh/dls/report>. Centers for Disease Control and Prevention for Environmental Health. Atlanta, Georgia. 72p.
- Haque, R., Falco, J., Cohen, S., Riordan, C., 1980. Role of Transport and Fate Studies in the Exposure Assessment and Screening of Toxic Chemicals in *Dynamics, Exposure and Hazard Assessment of Toxic Chemicals*. Ann Arbor Science, Ann Arbor, Ch. I, pp. 47–67p.
- Kardestuncer, H., Norrie, D. H., 1987. Finite Element Handbook. McGraw-Hill, New York.
- Lions, J. L., 1961. Equations Differentielles Operationelles. Springer.

- Loehr, R. C., 1984. Pollution Control for Agriculture. Academic Press Inc., Orlando.
- Marchuk, G. I., 1986. Mathematical models in environmental problems. Vol. 16 of Studies in Mathematical and its Application. North-Holland, Amsterdam.
- Mellanby, K., 1982. Biologia da poluição, tradução Lúcia Baugartner Lambert. EDUSP, São Paulo.
- Mistro, D. C., 1992. O problema de poluição em rios por mercúrio metálico: modelagem e simulação. Tese de Mestrado, IMECC - UNICAMP, Campinas/SP.
- National Research Council/USA, 2000. Scientific frontiers in developmental toxicology and risk assessment, url: <http://www.nap.edu/books/0309070864/html/>. National Academy Press, 10-16.
- Rebouças, A. C., 1997. Panoramas da degradação ambiental do ar, da água doce e da terra no Brasil. Academia Brasileira de Ciências (Ed.), Rio de Janeiro.
- Sossae, R. C., 1995. Dinâmica populacional densidade-dependente em processos de dispersão e migração. Tese de Mestrado, IMECC - UNICAMP, Campinas/SP.
- Thibodeaux, L. J., 1979. Chemodynamics. John Wiley & Sons, New York.

Dispersão de Plantas Anuais com Bancos de Sementes: Um Modelo Discreto com Operadores Integrais e Retardamento

D. C. Mistro*, L. A. D. Rodrigues* e A. B. Schmid**

*UFSM - Departamento de Matemática, diomar@ccne.ufsm.br

** Bolsista de Iniciação Científica - FAPERGS (Processo 011226)

Resumo

Neste trabalho, formulamos um modelo discreto com operadores integrais para descrever a dispersão espacial de uma população de plantas anuais com banco de sementes. O modelo proposto considera crescimento dependente da densidade e o padrão de dispersão das plantas. Os efeitos do banco de sementes sobre o comportamento assintótico da solução são analisados através de simulações numéricas.

1 Introdução

Plantas anuais produzem sementes uma vez por ano. A cada ano, as plantas crescem, florescem e morrem, deixando seus descendentes na forma dormente de sementes, que devem sobreviver o inverno para produzir a nova geração. No ano seguinte uma fração das sementes germina, enquanto outras permanecem dormentes por um ano ou mais antes de germinar.

Edelstein-Keshet [4] formulou um modelo para descrever a dinâmica de plantas anuais considerando um banco de sementes de dois anos. Em seu modelo, considera apenas o número de indivíduos em cada geração, isto é, o meio é considerado espacialmente homogêneo. No entanto, a variabilidade espacial é de grande importância na dinâmica de uma população. O estudo das invasões biológicas é fundamental para se prever os danos ecológicos e econômicos da dispersão de uma população.

Modelos para dispersão de plantas têm sido desenvolvidos através de equações a diferenças integrais [Andersen, 1991; Hart and Gardner, 1997; Allen et al., 1996]. Uma vez que os episódios de dispersão e reprodução são eventos discretos para muitas espécies de plantas, este tipo de modelagem é mais adequado do que os modelos de reação-difusão amplamente utilizados para descrever dispersão populacional [Murray, 1989; Okubo, 1980; Shigesada et al., 1997]. Além disso, o operador de difusão pressupõe grande disparidade entre a escala de dispersão e a escala de observação do fenômeno, isto é, considera dispersão local de sementes, o que não ocorre para as plantas aqui consideradas.

Os modelos desenvolvidos para dispersão de plantas, no entanto, não consideram bancos de sementes. Isto é, consideram que as sementes com mais de um ano não são aptas a germinar ou morrem.

Neste trabalho, a partir dos modelos apresentados por Edelstein-Keshet [1988] e Andersen [1991] para descrever a dinâmica e dispersão de plantas anuais, respectivamente, formulamos um modelo discreto com operadores integrais para descrever a dispersão de plantas anuais com bancos de sementes. O modelo considera crescimento dependente da densidade como efeito da competição intra-específica e o comportamento de dispersão de sementes. São realizados experimentos numéricos, através dos quais concluímos sobre o comportamento assintótico do modelo proposto.

2 O Modelo

Consideramos que as plantas produzem sementes no final da estação de crescimento e depois morrem. Uma fração das sementes sobrevive o inverno e, parte delas germina na próxima estação. Das sementes restantes, algumas permanecem em estado latente, para germinar após o segundo inverno. Para simplificar, suporemos inicialmente, que as sementes com mais de dois anos são inviáveis e morrem.

A cada primavera, sementes (de um e dois anos) iniciam a germinação. A competição por espaço e recursos entre as mudas reduz a sua sobrevivência, isto é, consideramos uma dependência da densidade de sementes na população de plantas adultas.

Se s_t e p_t denotam, respectivamente, o número de sementes em germinação e plantas adultas na geração t em um ambiente espacialmente homogêneo,

então

$$s_{t+1} = \alpha\sigma\gamma p_t + \beta\sigma(1 - \alpha)\sigma\gamma p_{t-1}, \quad (1)$$

onde γ descreve o número de sementes produzidas por planta; α indica a fração de sementes de um ano que germina; σ representa a fração de sementes que sobrevive um inverno e β a fração de sementes de dois anos que germina. Assim, O primeiro termo à direita representa as sementes de um ano que germinam e o segundo termo à direita, as sementes de dois anos que sobreviveram e germinam no segundo ano. Os parâmetros α , β e σ são adimensionais enquanto $[\gamma] = \frac{\text{sementes}}{\text{planta}}$.

Na geração $t+1$, as sementes em germinação irão competir por alimento, luz e espaço e desta forma a densidade de adultos terá um crescimento dependente da densidade de sementes em germinação. Usando a função de crescimento de Ricker, a população de plantas na geração $t+1$ é dada por

$$\begin{aligned} p_{t+1} &= a s_{t+1} \exp(-b s_{t+1}) \\ &= a (\alpha\sigma\gamma p_t + \beta\sigma(1 - \alpha)\sigma\gamma p_{t-1}) \exp(-b (\alpha\sigma\gamma p_t + \beta\sigma(1 - \alpha)\sigma\gamma p_{t-1})), \end{aligned} \quad (2)$$

onde a indica a fecundidade per capita das sementes em germinação na ausência da dependência da densidade e b representa o grau com que a fecundidade é reduzida pelo efeito da dependência da densidade. Os parâmetros a e b têm as seguintes dimensões:

$$[a] = \frac{\text{plantas}}{\text{semente}} \quad [b] = \frac{1}{\text{semente}}.$$

Agora, para introduzir a variação espacial, vamos considerar $S_t(x)$ a densidade de sementes em germinação na posição x e no início da geração t depois que os adultos das duas gerações anteriores propagaram suas sementes e, $P_t(x)$ a densidade de plantas adultas na geração t no ponto x . Assim,

$$S_{t+1}(x) = \alpha\sigma\gamma \int_{\Omega} k(x-y) P_t(y) dy + \beta\sigma(1 - \alpha)\sigma\gamma \int_{\Omega} k(x-y) P_{t-1}(y) dy, \quad (3)$$

onde $k(x, y)$ chamado núcleo de redistribuição, descreve a probabilidade de uma semente, proveniente das plantas da posição y , cair na posição x . O núcleo de redistribuição é de fundamental importância neste tipo de formulação, representa os diferentes tipos de comportamento das plantas ao dispersar suas sementes: por lançamento, pelo vento, através de queda simples, etc.

Em cada ponto do domínio, as sementes irão competir por espaço, luz e alimento. Dessa forma, para determinar a densidade de plantas adultas na geração $t+1$ na posição x , substituímos $S_t(x)$ e $P_t(x)$ na equação (2), obtendo

$$\begin{aligned} P_{t+1}(x) &= aS_{t+1}(x) \exp(-bS_{t+1}(x)) \\ &= a \left(\alpha\sigma\gamma \int_{\Omega} k(x-y)P_t(y)dy + \beta\sigma(1-\alpha)\sigma\gamma \int_{\Omega} k(x-y)P_{t-1}(y)dy \right) \cdot \\ &\quad \cdot \exp \left(-b \left(\alpha\sigma\gamma \int_{\Omega} k(x-y)P_t(y)dy \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \beta\sigma(1-\alpha)\sigma\gamma \int_{\Omega} k(x-y)P_{t-1}(y)dy \right) \right) \end{aligned}$$

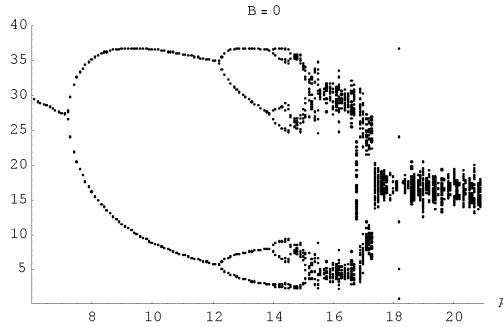


Figura 1: Diagrama de Bifurcação para $B = 0$. No eixo vertical, ilustramos os últimos cem valores da população total, após quatrocentas iterações.

Dado o grande número de parâmetros envolvidos no modelo, procedemos uma adimensionalização, a qual reduz o número de parâmetros a grupos adimensionais reveladores dos reais mecanismos que determinam a dinâmica do problema. Para isto, introduzimos a variável adimensional $U_t(x) = \frac{P_t(x)}{a/b}$, que substituída na equação (3) fornece a densidade adimensional de sementes na posição x no início da geração $t + 1$:

$$\bar{S}_{t+1}(x) = A \int_{\Omega} k(x-y)U_t(y)dy + AB \int_{\Omega} k(x-y)U_{t-1}(y)dy,$$

onde

$$A = a\alpha\sigma\gamma \quad \text{e} \quad B = \frac{\beta\sigma(1-\alpha)}{\alpha} \quad (4)$$

são constantes adimensionais.

Dessa forma,

$$U_{t+1}(x) = \bar{S}_{t+1}(x) \exp(-\bar{S}_{t+1}(x))$$

ou

$$U_{t+1}(x) = A \left(\int_{\Omega} k(x-y) U_t(y) dy + B \int_{\Omega} k(x-y) U_{t-1}(y) dy \right) \cdot \exp \left(-A \left(\int_{\Omega} k(x-y) U_t(y) dy + B \int_{\Omega} k(x-y) U_{t-1}(y) dy \right) \right) \quad (5)$$

é a densidade adimensional de plantas adultas na posição x , na geração $t + 1$.

$B = 0$ na equação (5) significa ausência de bancos de sementes, isto é, após um ano as sementes que não germinaram tornam-se inviáveis e morrem. Neste caso, a equação (5) torna-se análoga adimensional do modelo estudo por Andersen (1991):

$$U_{t+1}(x) = A \int_{\Omega} k(x-y) U_t(y) dy \cdot \exp \left(-A \int_{\Omega} k(x-y) U_t(y) dy \right) \quad (6)$$

Para pequenos valores de A , em habitats finitos, a solução desta equação converge para um ponto fixo $\bar{U}(x)$, que representa uma distribuição de equilíbrio homogênea das plantas. À medida que o parâmetro A aumenta, o ponto fixo perde sua estabilidade e ocorre uma bifurcação, surgindo um ciclo de período-2, isto é, a distribuição de equilíbrio das plantas oscila homogeneamente entre dois valores. Aumentos maiores em A causam uma seqüência de bifurcações que conduzem ao caos [Andersen, 1991].

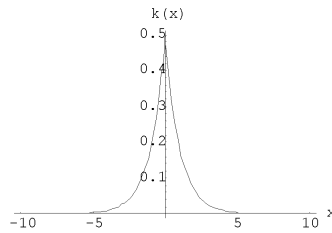


Figura 2: Núcleo de Redistribuição $k(x)$, descreve as características de dispersão das sementes.

O diagrama de bifurcação para a equação (6), isto é, para $B = 0$ é ilustrado na figura 1. Neste gráfico, a quantidade plotada no eixo vertical é a população total $\bar{U} = \int_{\Omega} \bar{U}(x) dx$ após o equilíbrio ter sido alcançado.

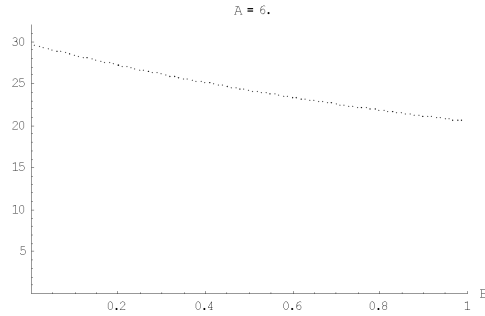


Figura 3: Diagrama de Bifurcação para $A = 6$ e $0 \leq B \leq 1$.

Nosso objetivo neste trabalho, é estudar o comportamento assintótico do modelo (5) para $0 \leq B \leq 1$ para diferentes distribuições iniciais da população de plantas. O valor $B \leq 1$, significa que a fração de sementes que germina no segundo ano, no máximo, é igual àquela que germinou no primeiro ano, hipótese bastante razoável para a maioria das espécies.

3 Propriedades do Modelo

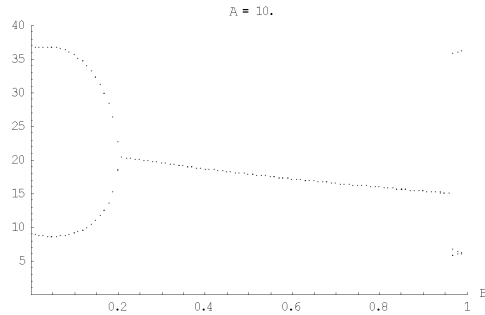


Figura 4: Diagrama de Bifurcação para $A = 10$ e $0 \leq B \leq 1$.

Analisamos o comportamento assintótico da solução da equação (5) através do seguinte experimento numérico: consideramos uma distribuição inicial constante $U_0(x) = 0.25$. A partir desta distribuição inicial, fixamos alguns valores de A escolhidos a partir do comportamento exibido na figura 1, isto é, valores de A para os quais o comportamento da solução da equação (6) fosse diferente.

Para cada A fixo, analisamos a população total de plantas para $0 \leq B \leq 1$, confeccionado assim, diagramas de bifurcação com relação ao parâmetro B . Em todas as simulações utilizamos como núcleo de redistribuição, a distribuição de Weibull $k(x) = \frac{1}{2} \exp(-|x|)$ e um domínio finito de comprimento fixo (figura 2).

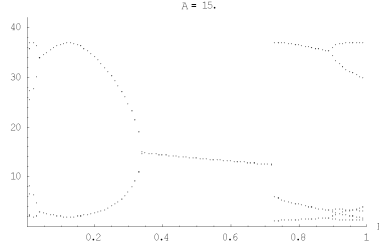


Figura 5: Diagrama de Bifurcação para $A = 15$ e $0 \leq B \leq 1$.

Os resultados ilustrados no gráficos das figuras 3 a 6, mostram que o banco de sementes pode provocar uma mudança significativa na dinâmica de plantas anuais. Para $A = 6$ e $B = 0$, isto é, na ausência de bancos de sementes, a população assume um equilíbrio assintoticamente estável. À medida que aumentamos B , o valor do equilíbrio diminui, porém o comportamento do equilíbrio não é alterado, como ilustra o gráfico na figura 3.

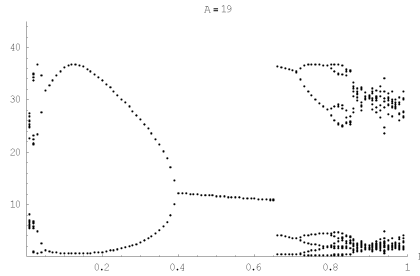


Figura 6: Diagrama de Bifurcação para $A = 19$ e $0 \leq B \leq 1$.

Para $A = 10$ e $B = 0$, há um ciclo de período dois. Com o aumento da germinação do banco de sementes, observamos uma mudança qualitativa no comportamento da solução de equilíbrio, isto é, ocorre uma bifurcação em $B = 0.21$ e o ciclo de período dois dá lugar a um equilíbrio estável até o valor

$B = 0.98$ ser alcançado quando então, ocorre uma nova bifurcação e surge um ciclo de período três (figura 4).

Com $A = 15$ e $B = 0$ ocorre um ciclo de período oito. À medida que o parâmetro B é aumentado, surge um ciclo de período quatro, em seguida um ciclo de período dois e para $0.35 \leq B \leq 0.72$ a população total de equilíbrio é estável. Para $0.72 \leq B \leq 0.89$ surge um ciclo de período três e finalmente, um ciclo de período seis (figura 5).

Para $A = 19$ o comportamento da solução é relativamente semelhante. Para aumentos em B , surgem ciclos de período cada vez menor e em seguida, um ponto de equilíbrio estável, o qual dá lugar a um ciclo de período três. Novamente ocorrem bifurcações surgindo ciclo de período seis e ciclos de períodos maiores que conduzem ao caos (figura 6).

Conclusões

Neste trabalho formulamos um modelo discreto com operadores integrais para a descrição da dispersão espacial de plantas com bancos de sementes, o qual considera o crescimento das plantas dependente da densidade de sementes em germinação e o comportamento de espalhamento das plantas. Nas simulações numéricas realizadas, foi observado que a germinação das sementes do banco de sementes pode alterar significativamente a dinâmica da população de plantas adultas.

Os resultados obtidos mostram que, ao contrário dos modelos contínuos em que os retardamentos têm um efeito desestabilizador, o banco de sementes em modelos discretos que incluem a dispersão espacial, pode ter um efeito estabilizador do equilíbrio da população. Para determinados valores do parâmetro B , que representa o efeito de retardamento ou a germinação do banco de sementes, soluções periódicas dão lugar a um ponto fixo assintoticamente estável. À medida que A (relacionado com as plantas provenientes de sementes de um ano) aumenta, diminui o intervalo do parâmetro B onde há um equilíbrio estável da população. Isto significa que espécies que produzem grande quantidade de sementes com baixa mortalidade, alta taxa de germinação no primeiro ano ou alta fecundidade per capita (ou seja, A grande), tendem a oscilar se a germinação do banco de sementes não estiver em torno de cinquenta por cento da germinação do primeiro ano. Espécies com pequena produtividade de sementes ou alta taxa de mortalidade das sementes (isto é, A pequeno) tendem a atingir um valor de equilíbrio estável, mesmo com alta germinação

do banco de sementes.

Em estudos futuros pretendemos estudar o comportamento do modelo (4) para outras distribuições iniciais da população de plantas tanto no que se refere à solução de equilíbrio como à distribuição espacial. Resultados iniciais sugerem que, dependendo da distribuição inicial, pode ocorrer a formação de padrões espaciais não homogêneos mesmo em ambientes homogêneos e na ausência de espécies competidoras ou predadoras que poderiam causar instabilidade difusiva.

Referências

- [1] Allen, E. J., Allen, L. J. S. and Xiaoning, G.: "Dispersal and Competition Models for Plants". *Journal of Mathematical Biology*, **34**, 1996, pp 455-481.
- [2] Andersen, M.: "Properties of Some Density-Dependent Integrodifference Equation Population Models". *Mathematical Biosciences*, **104**, 1991, pp 135-157.
- [3] Edelstein-Keshet, L.: *Mathematical Models in Biology*. Random House, New York, 1988.
- [4] Goldberg, S.: *Introduction to Difference Equations*. Dover Publications Inc., New York, 1986.
- [5] Hart, D. R. and Gardner, R. H.: "A Spatial Model for the Spread of Invading Organisms Subject to Competition". *Journal of Mathematical Biology*, **35**, 1997, pp 935-948.
- [6] Kot, M and Schaffer, W. M.: "Discrete-Time Growth-Dispersal Models". *Mathematical Biosciences* **80**, 1986, pp 109-136.
- [7] Kot, M.: "Discrete-Time Travelling Waves: Ecological Examples". *Journal of Mathematical Biology*, **30**, 1992, pp 413-430.
- [8] Mistro, D. C.: "Modelos para Dispersão de Abelhas Africanizadas: Um Zoom Matemático". Tese de Doutorado, Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP, 1998.
- [9] Murray, J. D.: *Mathematical Biology*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

Refúgios Espaciais em Interações Presa-Predador

L. A. D. Rodrigues*, D. C. Mistro* e A. L. Auth**

*UFMS - Departamento de Matemática, luizdiaz@ccne.ufsm.br

** Bolsista de Iniciação Científica - PIBIC/CNPq

Resumo

Neste trabalho, analisamos um modelo para interações presa-predador com movimentação espacial e assumindo a existência de refúgios nos quais as presas podem ficar protegidas dos ataques dos predadores.

Consideramos um modelo tipo autômatos celulares em que uma fração constante de parasitas e outra de hospedeiros se movimentam localmente em um domínio bidimensional. Para incluir o efeito dos refúgios consideramos regiões do espaço nas quais a eficiência do predador é muito menor que no resto do habitat.

Verificamos que, a presença de refúgios espaciais pode, de fato, permitir um aumento no número médio dos indivíduos de ambas espécies. Outras simulações indicam que os refúgios podem explicar as freqüentes explosões populacionais observadas na natureza.

1 Introdução

Uma questão fundamental em Ecologia é a coexistência de espécies. Sabe-se que em meios homogêneos, as populações de presas e predadores com gerações discretas não irão persistir, enquanto em meios heterogêneos a dispersão tem um efeito estabilizante (Hassell [3], Hassell et al. [4]).

Tem-se tornado popular a referência a meios compostos por patches, que são heterogêneos tanto no espaço como no tempo. Uma questão importante refere-se aos refúgios espaciais que representam locais físicos nos quais uma fração da população das presas pode recolher-se para proteger-se de predadores. Os refúgios servem como sítios de preservação de espécies vulneráveis

que, de outra maneira, poderiam tornar-se extintas. Tais sítios também beneficiam indiretamente as espécies predadoras, uma vez que uma reposição maior de presas nas áreas desprotegidas, garante uma fonte constante de alimento. Podemos citar como exemplos de refúgios, a lagarta do gênero *Ephestia spp* quando no interior da flor não é atingida pelo seu parasita *Nemeritis canescens* e colônias do afídeo *Brevicoryne brassicae* nas quais os indivíduos que se encontram na periferia são mais suscetíveis a ação predatória do *Diaretiela rapae* do que os que se encontram no interior da colônia (Hassell [3]).

2 O Modelo

O presente modelo foi desenvolvido com o objetivo de estudar os efeitos de refúgios espaciais em dinâmicas presa-predador. Consideramos um modelo tipo autômatos celulares (Ermentrout [2]) no qual os indivíduos de ambas populações se movimentam em um domínio bidimensional dividido em manchas discretas.

Para cada geração a dinâmica consiste de duas fases: uma fase de dispersão e uma fase de reprodução. Na fase de dispersão, uma certa fração de presas, μ_N , e uma fração de predadores, μ_P , abandonam sua posição ("patch"), enquanto a fração restante permanece para reproduzir-se em seu "patch" original. Neste estudo consideramos uma movimentação aleatória essencialmente local, isto é, os indivíduos se dispersam a cada geração colonizando igualmente os quatro patches vizinhos mais próximos.

Incluimos também no modelo a existência de refúgios espaciais nos quais as presas são menos vulneráveis aos ataques dos predadores.

As equações para o estágio de dispersão em cada patch são:

$$\begin{aligned} N'_{i,t} &= (1 - \mu_N)N_{i,t} + \mu_N \bar{N}_{i,t} \\ P'_{i,t} &= (1 - \mu_P)P_{i,t} + \mu_P \bar{P}_{i,t}, \end{aligned} \tag{1}$$

Aqui $N_{i,t}$ e $P_{i,t}$ são as densidades populacionais da presa e do predador antes da dispersão, no patch i e no instante t ; $N'_{i,t}$ e $P'_{i,t}$ são as densidades após a movimentação, e $\bar{N}_{i,t}$ e $\bar{P}_{i,t}$ são as médias das populações de presas e predadores dos quatro vizinhos mais próximos.

A fase de reprodução e predação será descrita em cada patch pelas equações de Nicholson-Bailey:

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= \lambda N'_t \exp(-aP'_t) \\ P_{t+1} &= cN'_t[1 - \exp(-aP'_t)], \end{aligned} \tag{2}$$

onde λ é a taxa de crescimento da população das presas, a é a taxa per capita de ataque dos predadores e c é a eficiência de conversão de presas em predadores. Com esta dinâmica vital a persistência das populações é impossível, isto é, ambas populações apresentam oscilações divergentes conduzindo à extinção global. Entretanto, a dispersão difusiva (equações (1)) pode conduzir a coexistência das espécies para tempos suficientemente grandes. Três tipos de dinâmicas espaciais são descritas: caos, ondas espirais e padrões estáveis, todas apresentando persistência das populações de parasitas e hospedeiros (Hassell et al.[4]).

Para incluir o efeito dos refúgios podemos considerar regiões do espaço nas quais o predador não tem acesso ou onde a taxa de predação a é muito pequena em relação ao resto do domínio. Neste trabalho consideramos a taxa de predação a no interior dos refúgios menor do que no resto do habitat.

O habitat será representado por um reticulado bidimensional no qual as populações são distribuídas em cada vértice (célula) de coordenadas inteiras. Na figura 1 mostramos um refúgio espacial correspondente a aproximadamente 1% do habitat.

3 Simulações

As simulações foram realizadas em um reticulado de 50×50 com os seguintes parâmetros: $\lambda = 2$, $a = 0,5$, $c = 2$, $\mu_N = \mu_P = 0,6$. Todas as simulações começaram com densidades iniciais de parasitas e hospedeiros em uma única célula e com todas as outras vazias. Assumimos ainda condições reflexivas na fronteira do habitat.

Verificamos através da inclusão de um refúgio espacial 5×5 (aproximadamente 1% do domínio) o aumento na amplitude das oscilações nas populações de hospedeiros e parasitas [Figura 2]. Isto pode ser uma explicação para as explosões populacionais periódicas observadas em alguns sistemas naturais.

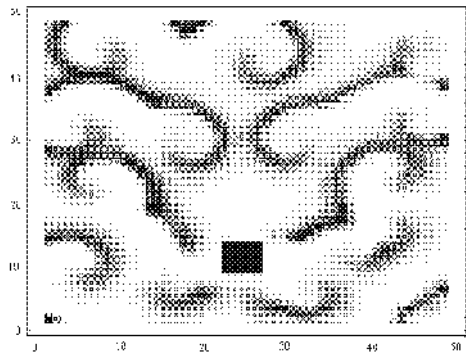


Figura 1: Distribuição espacial dos hospedeiros em um habitat com um refúgio espacial (1% do habitat). Observamos a formação de ondas espiraladas muito freqüentes em sistemas de reação-difusão.

Observamos que, à medida que tornamos o refúgio "mais forte", diminuindo a capacidade do predador no interior do mesmo, há um aumento na amplitude das oscilações [compare as figuras 2 e 3].

Na figura 4, observamos que o mesmo acontece quando aumentamos as dimensões dos refúgios.

Quando fracionamos o refúgio em diversos refúgios menores, mantendo a mesma área, verificamos um decréscimo na amplitude das oscilações e um aumento na população média tanto de hospedeiros quanto de parasitas. O decréscimo na amplitude das oscilações parece indicar um possível efeito estabilizador provocado pela fragmentação dos refúgios. As figuras 5 e 6 ilustram este fato. Este resultado está de acordo com o esperado: a presença de refúgios para as presas pode beneficiar ambas espécies.

4 Conclusões

Simulações numéricas para o modelo proposto mostram que a presença de refúgios espaciais pode beneficiar também a espécie predadora. Além disso, os refúgios representam uma explicação plausível para as explosões populacionais observadas em diversas interações presa-predador.

Por outro lado, estudos iniciais indicam que a coexistência das espécies no

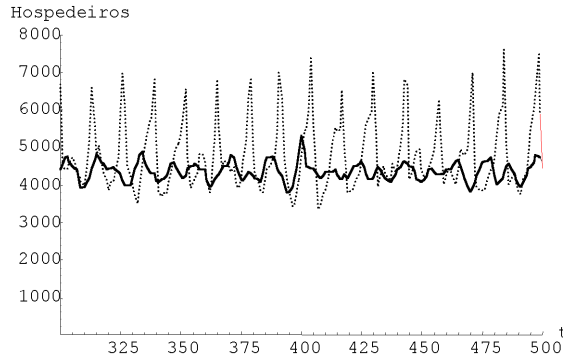


Figura 2: População de hospedeiros sem refúgio (–) e com um refúgio 5x5 (...). $a = 0,05$ no interior do refúgio.

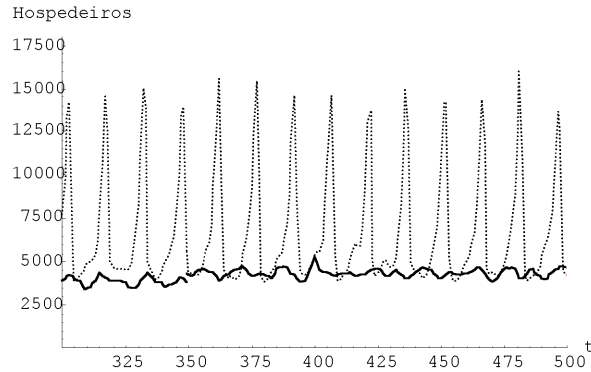


Figura 3: População de hospedeiros sem refúgio (–) e com um refúgio 5x5 (...). $a = 0,01$ no interior do refúgio.

modelo com refúgios, depende principalmente do tipo de fronteira do refúgio e da eficiência do predador dentro dos refúgios.

A distribuição espacial dos refúgios dentro do habitat parece ser um fator decisivo e deverá ser analisado em trabalhos futuros.

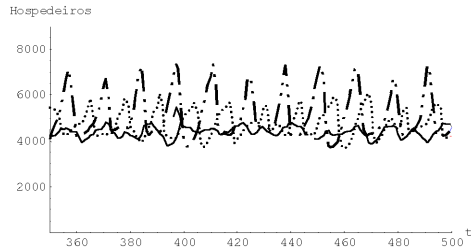


Figura 4: População de Hospedeiros sem refúgio (—), com refúgio 5×5 (...), e com refúgio 7×7 (- . -). $a = 0,05$ no interior dos refúgios.

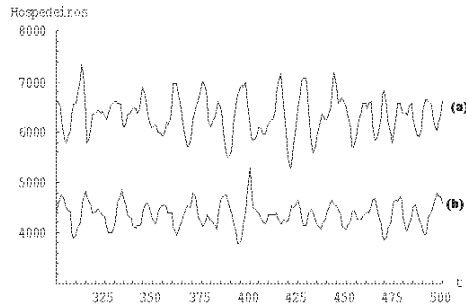


Figura 5: População de hospedeiros sem refúgios (b) e com seis refúgios 2×2 (a). $a = 0,01$ no interior dos refúgios.

Referências

- [1] Comins, H. N., Hassell, M. P., and May, R. M. The Spatial Dynamics of Host-Parasitoid Systems. *Journal of Animal Ecology*, **61**, 735-748, 1992.
- [2] Edelstein-Keshet, L.: Mathematical Models in Biology. Random House, New York, 1988.
- [3] Ermentrout, G. B., Edelstein-Keshet, L.: Cellular Automata Approaches to Biological Modeling. *J. Theor. Biol.*, **160**, 97-133, 1993.

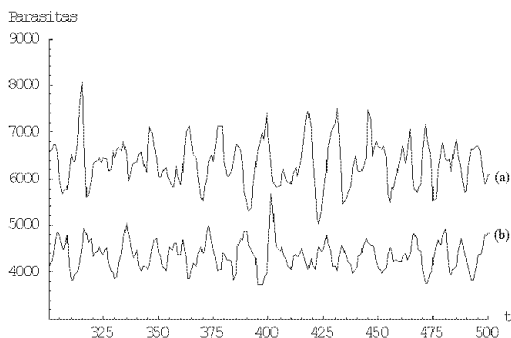


Figura 6: População de Parasitas sem refúgios (b) e com seis refúgios 2×2 (a). $a = 0,01$ no interior dos refúgios.

- [4] Hassell, M. P.: The Dynamics of Arthropod Predator-Prey Systems. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1978.
- [5] Hassell, M. P., Comins, H. N. and May, R. M.: Spatial Structure and Chaos in Insect Populations Dynamics. *Nature*, Lond. 353, 255-258, 1991.
- [6] Rodrigues, L. A. D.: O Acaso e a Decisão: Modelos Matemáticos para Dispersão Populacional. Tese de Doutorado, Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP, 1998.
- [7] Murray, J. D.: Mathematical Biology. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [8] Tilman, D. and Kareiva, P. (eds.) Spatial Ecology: the Role of Space in Population Dynamics and Interspecific Interactions. Monographs in Population Biology. Princeton University Press, 1997.

Uma Caricatura da Equação de Ludwig

Lucy T. Takahashi*,
Wilson C. Ferreira Jr[†]

IMECC – Unicamp, Cx.Postal 6065, 13083-970, Campinas/SP.

Resumo

Em [1], a distribuição espacial e temporal de uma praga é modelada por uma equação de conservação com difusão simples e dinâmica não linear

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru(1 - \frac{u}{K}) - B \frac{u^2}{A^2 + u^2}, \quad (1)$$

onde, u é a densidade dos insetos e ao crescimento logístico é acrescentado a predação por um inimigo natural, na forma de Holling. Murray [3], analisou no caso unidimensional como esta praga se propaga, encontrou condições para a existência de Onda Viajante e para a sua velocidade e desta análise determinou estratégias de controle para prevenir uma infestação, vinda desta propagação. Apresentamos uma caricatura, da dinâmica não linear (McKean[2]), onde as características essenciais não são perdidas, mas que nos possibilita o cálculo explícito de propriedades das Ondas Viajantes.

1 Introdução

A equação diferencial parcial não linear, proposta por Ludwig [1], é uma descrição matemática de uma interação, praga e seu inimigo natural, onde a dispersão é puramente difusiva. Sua complexidade, que podemos ver na equação (1), adimensionalizada,

*Bolsista do PICDT-UFV/CAPES. ltiemi@ime.unicamp.br

[†]wilson@ime.unicamp.br

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u), \quad (2)$$

onde,

$$f(u) = r_0 u \left(1 - \frac{u}{q}\right) - \frac{u^2}{1 + u^2} \quad (3)$$

nos levou a simplificá-la, através da substituição de $f(u)$, pela função de McKean,

$$f(u) = \begin{cases} -u + u_1, & u \leq a \\ -u + u_3, & u > a, \end{cases} \quad (4)$$

sendo u_1 e u_3 os estados estacionários instáveis de (2), veja o esboço do gráfico de f na figura 1. Considerando o caso unidimensional determinamos todas as soluções Onda Viajante, bem como sua velocidade de propagação.

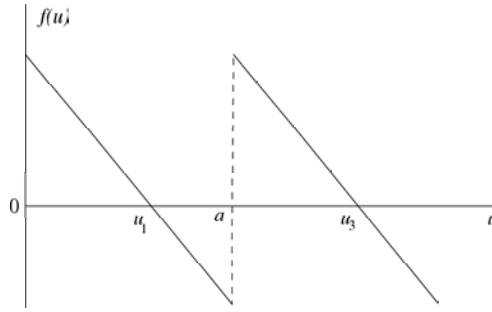


Figura 1: Função de McKean

A solução Onda Viajante, da equação (2), é a função $U(z) = u(x, t)$, onde $z = x - ct$, logo U satisfaz a equação diferencial ordinária

$$U'' - cU' + f(U) = 0, \quad (5)$$

com f dada pela equação (4) e onde “linha” representa a derivada em relação a variável z .

2 A Caricatura

Por conveniência, vamos repetir a equação (1),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru(1 - \frac{u}{K}) - B \frac{u^2}{A^2 + u^2},$$

que representa a variação da densidade u da praga em relação ao tempo, primeiro membro, é dada pela difusão, crescimento logístico e pela predação do tipo Holling, por um inimigo natural, primeiro, segundo e terceiro termos, respectivamente no segundo membro, onde D é o coeficiente de difusão o qual mede como rápido é a difusão dos insetos, r é a taxa de crescimento intrínscio da praga, K é a chamada capacidade suporte, A tem dimensão de u , é a densidade limiar da praga na qual a predação é "ligada" (começa a tomar lugar) e B tem dimensão de $u(\text{tempo})^{-1}$, representa o nível de saturação para a taxa de consumo dos insetos pelo inimigo, D , r , K , B e A são constantes positivas. Para a adimensionalização da equação (1), tomamos a seguinte mudança de variáveis:

$$\tau = \frac{t}{A/B}, \quad d = \frac{DA}{B}, \quad r_0 = \frac{Ar}{B},$$

$$q = \frac{K}{A}, \quad \rho = \frac{u}{A}, \quad \chi = \frac{x}{d},$$

e assim, obtemos a equação (2),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r_0 u(1 - \frac{u}{q}) - \frac{u^2}{1 + u^2},$$

onde, por simplicidade retornamos a $t = \tau$, $u = \rho$, $x = \chi$.

Em Murray [3], vemos que na ausência de difusão, que é a situação espacialmente homogênea, podemos ter três estados estacionários positivos, de fato, pois uma vez fixado o meio q depende das propriedades da praga e de seu predador, assim para q suficientemente grande é possível encontrarmos valores convenientes de r_0 e assim determiná-los, veja esquema na figura 2. Dois estados estacionários são linearmente estáveis u_1 e u_3 , e um instável u_2 . O estado estacionário $u_0 = 0$ é também instável. O menor estado estacionário positivo u_1 corresponde ao refúgio para a praga, enquanto que u_3 , o maior, corresponde a infestação, quando tomarmos $f'(u_0) > 0$, intuitivamente, deve existir uma trajetória, T , no plano de fase que ligue $(u_3, 0)$ a $(u_1, 0)$, veja figura 3, que tem

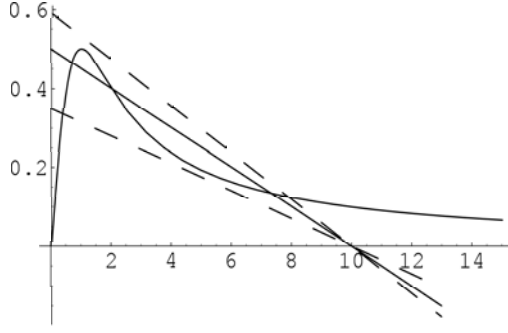


Figura 2: Os pontos de equilíbrio positivos são dados pela intersecção da reta $r_0(1 + u/q)$ com $u/(1 + u^2)$, para exemplificar, fixamos $q = 10$ e tomando diferentes valores para r_0 , de cima para baixo $r_0 = 0.6$ (tracejado), $r_0 = 0.5$ (contínua) e $r_0 = 0.35$ (tracejado). A intersecção da reta contínua com a curva nos dá os três pontos estacionários positivos.

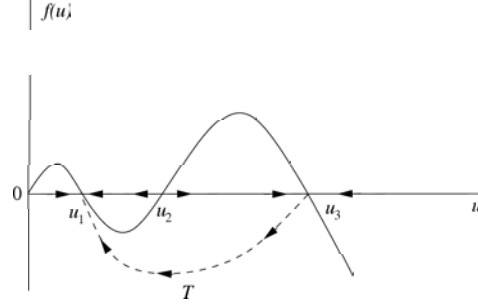


Figura 3: Interação-crescimento da praga com seu inimigo natural, $f(u)$ dado em (3), u_1 corresponde ao refúgio, u_3 corresponde a infestação e T é a trajetória no plano de fase ligando o ponto $(u_3, 0)$ ao ponto $(u_1, 0)$.

uma correspondente solução Onda Viajante, $U(z) = u(x, t)$, onde $z = x - ct$. A solução $U(z)$ neste caso satisfaz:

$$U(-\infty) = u_3 \text{ e } U(\infty) = u_1. \quad (6)$$

Esta é a situação que estamos interessados para o problema.

Para tanto, substituímos $f(u)$ na equação (2) pela função (4) conhecida como função de serra, veja figura 4, obtendo o sistema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u + u_1, & u \leq a \\ u_t = u_{xx} - u + u_3, & u > a, \end{cases} \quad (7)$$

e assim, trabalhamos com essa nova classe de equações, que tem uma forma similar e que preserva as características essenciais da equação (2), além do importante fato, esta é tratável matematicamente.

Encontramos então soluções Onda Viajante,

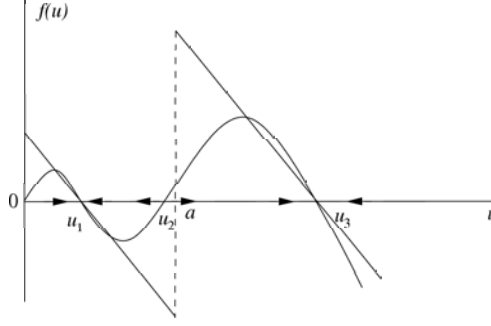


Figura 4: Esquema da substituição.

$$U(z) = \begin{cases} U_1(z) = u_1 + \frac{\lambda_1(u_1 - u_3)}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(\lambda_2 z), & U \leq a \\ U_2(z) = u_3 + \frac{\lambda_2(u_1 - u_3)}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(\lambda_1 z), & U > a, \end{cases} \quad (8)$$

para o sistema,

$$\begin{cases} U_1'' + cU_1' - U_1 + u_1 = 0, & U \leq a \\ U_2'' + cU_2' - U_2 + u_3 = 0, & U > a, \end{cases}$$

que satisfaz as condições de contorno (6) e como queremos que a densidade da população seja contínua e tenha um crescimento suave, ou seja, que não haja brusca mudança no comportamento da população, impomos que ela seja diferenciável, ou seja, a menos de uma translação horizontal

$$\begin{cases} U_1(0) = U_2(0) \\ U_1'(0) = U_2'(0), \end{cases}$$

e assim obtemos (8), veja figura 5, onde

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4}}{2}.$$

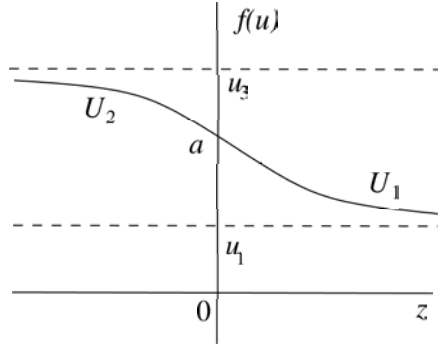


Figura 5: Típica solução Onda Viajante vindo de u_3 para u_1 .

Note que

$$U_1(0) = U_2(0) = a = \frac{\lambda_2 u_1 - \lambda_1 u_3}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (9)$$

onde por construção $u_1 < a < u_3$. De fato,

$$\begin{aligned} a &= \frac{\lambda_2 u_1 - \lambda_1 u_3}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 + 4}} \right) (u_1 - u_3) + \frac{1}{2} (u_1 + u_3) \end{aligned}$$

logo,

$$u_1 = \frac{1}{2} (u_1 - u_3) + \frac{1}{2} (u_1 + u_3) < a < \frac{1}{2} (u_1 + u_3) < u_3.$$

De (9), temos que

$$\frac{u_3 - a}{a - u_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1 + \frac{2c}{-c + \sqrt{c^2 + 4}} \quad (10)$$

logo,

$$c > 0 \Leftrightarrow \frac{u_3 - a}{a - u_1} > 1$$

$$c < 0 \Leftrightarrow \frac{u_3 - a}{a - u_1} < 1$$

$$c = 0 \Leftrightarrow a = \frac{u_3 + u_1}{2}.$$

Geometricamente,

(i) a velocidade c é positiva (negativa) se, e somente se, o ponto de conexão a , está mais próximo de u_1 (u_3), que de u_3 (u_1),

(ii) a velocidade c é nula se, e somente se, o ponto de conexão a é o ponto médio entre u_1 e u_3 .

Como o nosso objetivo é encontrar uma Onda Viajante, que caminhe da infestação para o refúgio, devemos tomar a velocidade c negativa, ou seja, a mais próximo de u_3 .

Através da equação (10) é possível estabelecer uma relação entre a velocidade c e $-\lambda_2/\lambda_1$, que é esboçada na figura 6.

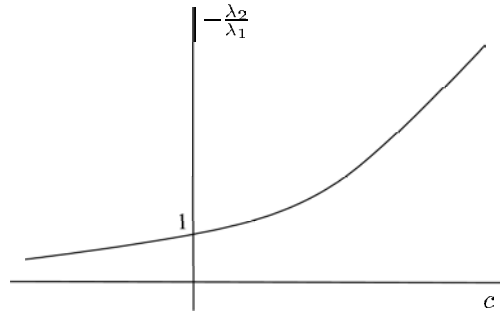


Figura 6: Gráfico da velocidade c com relação a $-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Do ponto de vista de controle da praga, se uma infestação ocorre e se espalha, nos queremos saber como alterar as condições locais para que a Onda de infestação seja contida. Pelos resultados obtidos acima devemos mudar localmente a dinâmica de crescimento da praga, para que a fique mais próximo de u_3 que de u_1 . Por exemplo, conhecida a praga e o meio ambiente é possível estimar os valores de refúgio u_1 e de infestação u_3 já a representa a densidade a partir da qual, apesar da presença do predador, a praga passa a ter uma taxa

de natalidade maior que a taxa de mortalidade e desta forma tem "forças" para atingir a densidade u_3 , então devemos definir estratégias que impliquem numa prolongação da parte negativa da sua dinâmica vital antes que ocorra o "salto" em a , o que pode ser feito diminuindo as áreas favoráveis à praga, com isso a Onda Viajante terá velocidade negativa e o sistema sozinho leva a densidade da praga à u_1 . Assim, basta que a ultrapasse o ponto médio $(u_1 + u_3)/2$. Mas se quisermos uma maior rapidez, pela equação (10), basta aproximar mais a de u_3 . Veja o comportamento da Onda Viajante com velocidades negativas distintas, figura 7 para a à direita de $(u_1 + u_3)/2$ mas próxima e figura 8 para a próxima de u_3 .

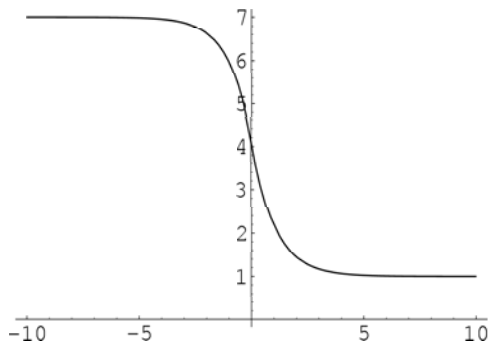


Figura 7: Esboço da Onda Viajante para $u_1=1$, $u_3=7$ e $a=4,1$; logo $c=-0,07$.

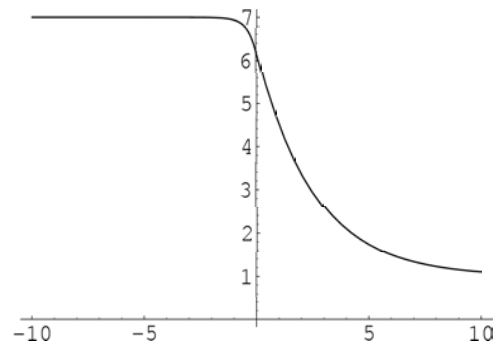


Figura 8: Esboço da Onda Viajante para $u_1=1$, $u_3=7$ e $a=6$; logo $c=-2,16$.

Referências

- [1] Ludwig, D., Aronson, D. G. and Weinberger, H. F., Spatial Patterning of the Spruce Budworm, *J. Math. Biology*, vol. 8, pp. 217–258 (1979).
- [2] McKean H. P., Nagumo's equation, *Adv. Math.*, vol. 4, pp. 209–223 (1970).
- [3] Murray, J. D., *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, Berlin (1993).

Estudo matemático da propagação de uma doença de transmissão indireta

Norberto Aníbal Maidana¹,

Wilson C. Ferreira Jr²

IMECC – Unicamp, Cx.Postal 6065, 13.083-970, Campinas/SP.

1 Introdução

O estudo da propagação de uma espécie alienígena introduzida em um meio foi amplamente desenvolvido depois da apresentação de Fisher [1] do modelo para a propagação de um gene mutante.

No livro de J.D.Murray[2] pode-se encontrar um amplo desenvolvimento destas questões.

No artigo de Murray et al [3] encontra-se uma aplicação à propagação da raiva em raposas e o resultado obtido aqui é a propagação da doença em forma de onda viajante.

Seguindo as idéias apresentadas nestes trabalhos estudamos a doença, o mal das cadeiras, que afeta as capivaras que habitam no Estero del Iberá, Corrientes, Argentina. Estudamos o modelo simplificado do proposto em [4]. Desconsideramos as morte, por causas diferentes da enfermidade, das capivaras e dos insetos. Isto acarretará a colonização total da área pelos insetos portadores do protozoário causador da enfermidade. O modelo é o seguinte:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} &= \lambda_S S \left(1 - \frac{S+I}{K_1}\right) - \beta_1 SP, \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= \beta_1 SP - \gamma I, \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= \alpha_N \Delta N + \lambda_N (N+P) \left(1 - \frac{P+N}{K_2}\right) - \beta_2 NI, \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= \alpha_N \Delta P + \beta_2 NI,\end{aligned}$$

onde $\alpha_S, \alpha_I, \alpha_N$ são os coeficientes de difusão das capivaras sadias, infetadas e dos insetos respetivamente, λ_S, λ_N são as taxas de reprodução para capivaras e insetos respetivamente.

¹Supported by PhD grant from CAPES. e-mail: nmaidana@ime.unicamp.br

²e-mail: wilson@ime.unicamp.br

β_1 e β_2 as taxas de transmissão da doença. γ é a taxa de mortalidade por doença nas capivaras infectadas.

Calculamos a velocidade de propagação da doença e realizamos gráficos para determinar a influência nesta propagação de cada parâmetro.

Utilizamos o modelo simplificado pois nele conseguimos realizar todos os cálculos analíticos em forma geral e não necessitamos calcular para parâmetros específicos. O método utilizado é primeiro reduzir a quantidade de parâmetros para uma melhor compreensão dos efeitos destes nas simulações. Obter soluções invariantes no espaço e no tempo, isto nos dá pontos de equilíbrio. Analisar a estabilidade linear destes pontos, pois estados instáveis podem ser modificados por pequenas perturbações e tender a um estado estável.

Analizamos a possibilidade de existência de soluções do tipo onda viajante, realizando a análise linear da EDO associada à EDP original. Desta análise determinamos a velocidade de propagação da doença, calculado no ponto de equilíbrio trivial, e as possibilidades de existência da onda, calculada no ponto não trivial. Utilizamos os Softwares Mathematica e Matlab para a simulação numérica das soluções.

2 Modelo

No modelo consideramos duas espécies: as capivaras e os insetos, onde cada uma se divide em duas categorias. As capivaras em sadias S e infectadas I , e os insetos em portadores P e não portadores N .

As espécies interagem da seguinte maneira:

- i) Uma capivara sadia torna-se infectada quando é picada por um inseto portador;
- ii) Um inseto não portador, torna-se portador quando pica uma capivara infectada. Estes dois itens caracterizam a *transmissão indireta*.
- iii) A difusão é a mesma nas duas classes de insetos. Nas capivaras não é considerada por ser muito menor que a dos insetos. Não consideramos transporte para nenhum dos compartimentos.
- iv) A dinâmica vital é dada, tanto nos insetos, como nas capivaras, por uma função logística.
- v) Consideramos somente γ morte devida à infecção.

O modelo matemático é dado pelo seguinte sistema de EDPs:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \lambda_S S \left(1 - \frac{S+I}{K_1}\right) - \beta_1 SP \quad (1)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \beta_1 SP - \gamma I \quad (2)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \alpha_N \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \lambda_N (N+P) \left(1 - \frac{P+N}{K_2}\right) - \beta_2 NI \quad (3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \alpha_N \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \beta_2 NI. \quad (4)$$

onde:

S \equiv Densidade populacional de Capivaras Sadias

I \equiv Densidade populacional de Capivaras Infetadas

N \equiv Densidade populacional de Insetos Não Portadores

P \equiv Densidade populacional de Insetos Portadores

Este modelo é uma simplificação do proposto em [4], em dimensão 1.

Adimensionalização

Realizamos a seguinte adimensionalização: as populações são divididas por sua capacidade de suporte, o tempo é medido em função da taxa de crescimento da população de capivaras e no espaço consideramos como o parâmetro da difusão dos insetos.

$$N^* = \frac{N}{K_2}, P^* = \frac{P}{K_2}, S^* = \frac{S}{K_1}, I^* = \frac{I}{K_1},$$

$$t^* = \lambda_S t, \quad x^* = x \sqrt{\left(\frac{\lambda_S}{\alpha_N}\right)}, \quad a = \frac{K_2 \beta_1}{\lambda_S}, \quad b = \frac{K_1 \beta_2}{\lambda_S},$$

$$\lambda = \frac{\lambda_N}{\lambda_S}, \quad \eta = \frac{\gamma}{\lambda_S}.$$

Modelo adimensionalizado

Retirando os asteriscos para simplificar a notação, da mudança proposta acima obtemos o seguinte modelo:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = S(1 - (S + I)) - aSP \quad (5)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = aSP - \eta I \quad (6)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \lambda(P + N)(1 - (P + N)) - bNI \quad (7)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + bNI \quad (8)$$

3 Dinâmica do sistema homogêneo

Analizamos aqui a dinâmica do sistema homogêneo, procurando soluções que não dependem do espaço e tempo (pontos críticos). Resolvemos o seguinte sistema de equações para obtermos os pontos estacionários do modelo adimensionalizado:

$$S(1 - (S + I)) - aSP = 0 \quad (9)$$

$$aSP - \eta I = 0 \quad (10)$$

$$\lambda(P + N)(1 - (P + N)) - bNI = 0 \quad (11)$$

$$bNI = 0 \quad (12)$$

e obtemos os seguintes pontos de estabilidade:

$$E_0 = (S_0, I_0, 0, 1),$$

$$E_1 = (1, 0, 0, 0),$$

$$E_2 = (1, 0, 1, 0),$$

$$E_3 = (0, 0, 0, 0),$$

$$E_k = (0, 0, k, 1 - k), \quad k < 1,$$

onde,

$$S_0 = \frac{(1 - a)}{(1 + \frac{a}{\eta})}, \quad I_0 = \frac{a(1 - a)}{\eta(1 + \frac{a}{\eta})}. \quad (13)$$

A condição necessária para termos $S_0, I_0 > 0$, já que são populações, é que $a < 1$. Logo, em função das variáveis originais temos a seguinte estimacão em tempos:

$$\frac{1}{\lambda_S} < \frac{1}{K_2 \beta_2}$$

Notemos que esta condição não depende do parâmetro b , que é taxa de contágio dos insetos, dependendo somente do parâmetro a , taxa de contágio das capivaras. No Modelo geral teremos dependência de b .

Observemos que quanto mais perto o valor de a se encontra de 1, valor máximo para a transmissão de infecção, menos capivaras sobrevivem à frente, até atingir o valor $a = 1$, onde ocorre a extinção. Temos um estado endêmico quando $a < 1$, sobrevivendo a maioria delas.

Como $a = \frac{K_2 \beta_1}{\lambda_S}$ isto acontece se a taxa de reprodução das capivaras sadias é alta, ou se a capacidade de suporte dos insetos e a taxa de infecção das capivaras são baixas. Logicamente estes fatos favorecem a não propagação da doença.

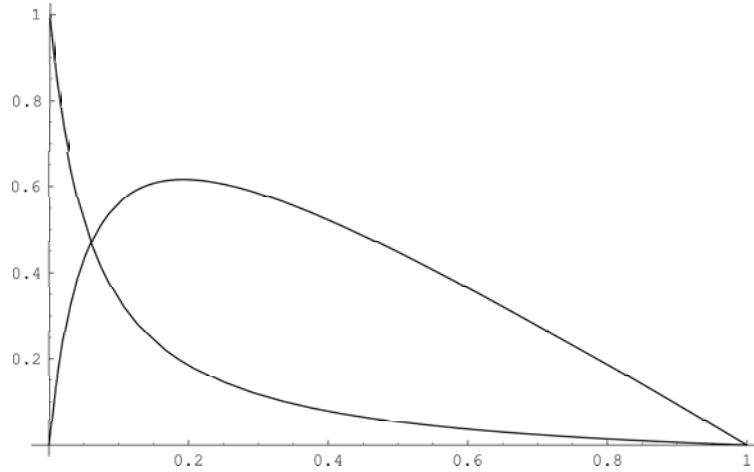


Figura 1: Gráfico dos estados de equilíbrio S_0, I_0 em função da taxa de infecção das capivaras a para o valor fixo $\eta = 0.06$

Podemos ver no gráfico 1 a variação dos pontos de estabilidade S_0, I_0 , para diferentes valores da taxa de contágio das capivaras a , tomando $\eta = 0.06$. Notemos que quando $a = 1$ temos zeros para cada compartimento, ou seja, a extinção. Quando $a = 0$ não temos propagação da doença, obtendo então $S_0 = 1, I_0 = 0$. O ponto de máximo se dá para $a = 0.19$. Para essa taxa de contágio temos a máxima quantidade de infectados $I_0 = 0.615$.

Estabilidade do sistema homogêneo

Estabilidade do ponto $E_2 = (1, 0, 1, 0)$

Os autovalores da linearização neste ponto são:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 < 0 \\ x_2 &= -\lambda < 0 \\ x_{3,4} &= -\eta \pm \sqrt{\eta^2 + 4ab} \end{aligned}$$

Como $x_2 > 0$ este ponto é sempre instável (veremos que no modelo geral temos a condição de estabilidade).

Estabilidade do ponto $E_0 = (S_0, I_0, 0, 1)$

Os autovalores neste ponto são:

$$\begin{aligned} x_1 &= -bI_0 < 0 \\ x_2 &= -\lambda < 0 \end{aligned}$$

e as raízes do polinômio:

$$x^2 + (-1 + 2S_0 - I_0 + a + \eta)x + (-\eta + 2\eta S_0 - \eta I_0 + \eta a + aS_0).$$

Então as condições necessárias e suficientes para que $E_0 = (S_0, I_0, 0, 1)$ seja estável, são:

$$-(-1 + 2s_0 - I_0 + a + \eta) < 0$$

e

$$(-\eta + 2\eta S_0 - \eta I_0 + \eta a + a S_0) > 0.$$

Logo, se

$$\eta < 1 \quad (14)$$

é necessário e suficiente que

$$\eta > a \quad (15)$$

para obtermos a estabilidade de E_0 .

Como o ponto E_2 é instável, e com as condições encontradas acima, o ponto E_0 é estável, logo procuramos solução de onda viajante que vai do ponto E_2 ao E_0 .

Estabilidade do ponto $E_k = (0, 0, k, 1 - k)$

Os autovalores neste ponto são:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= -\lambda < 0 \\ x_3 &= -\eta < 0 \\ x_4 &= 1 - a(1 - k) \end{aligned}$$

Sabemos que $k < 1$, agora se $a < 1$ temos que

$$1 - a(1 - k) > 0$$

com o qual E_k é instável. Isto significa que no caso de existir ponto de coexistência é o único estável.

Se $a \geq 1$ então E_k vai deixar de ser instável se $a(1 - k) > 1$. Em $a = 1$ temos um ponto de bifurcação. Notemos que quando $a = 1$ temos a igualdade entre os pontos críticos $E_0 = E_k = (0, 0, 0, 1)$, para $k = 0$ e além disso, coincidindo também os autovalores e tornado-se estável, já que $x_4 = 0$ deixando de ser positivo. Este ponto, $(0, 0, 0, 1)$ é da extinção das capivaras. Encontramos também ondas viajantes neste caso onde $E_2 = (1, 0, 1, 0)$ é instável e $E_0 = (0, 0, 0, 1)$ estável.

Estabilidade do ponto $(0, 0, 0, 0)$

Os autovalores no ponto trivial $(0, 0, 0, 0)$ são:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= \lambda < 0 \\ x_3 &= -\eta < 0 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

sendo então sempre instável. Se tivermos as capivaras e insetos com densidade no valor das capacidades de suporte, podemos esperar que não se extingam as duas espécies no caso de invasão.

4 Ondas viajantes

Nesta seção procuramos as soluções do tipo onda viajante. Fazemos a mudança:

$$S(x, t) = S(z)$$

$$I(x, t) = I(z)$$

$$N(x, t) = N(z)$$

$$P(x, t) = P(z)$$

$$z = x + ct$$

Com esta mudança, o sistema de EDPs ((5) - (8)) se transforma no seguinte sistema de EDOs associado:

$$-cS' + S(1 - (S + I)) - aSP = 0 \quad (16)$$

$$-cI' + aSP - \eta I = 0 \quad (17)$$

$$N'' - cN' + \lambda(P + N)(1 - (P + N)) - bNI = 0 \quad (18)$$

$$P'' - cP' + bNI = 0 \quad (19)$$

Escrevendo o sistema anterior como um sistema de equações ordinárias de primeira ordem temos:

$$S' = \frac{1}{c}S(1 - (S + I)) - \frac{a}{c}SP \quad (20)$$

$$I' = \frac{a}{c}SP - \frac{\eta}{c}I \quad (21)$$

$$N' = X \quad (22)$$

$$P' = Y \quad (23)$$

$$X' = cX - \lambda(P + N)(1 - (P + N)) + bNI \quad (24)$$

$$Y' = cY - bNI \quad (25)$$

Os pontos críticos que consideramos neste caso são $P_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 0)$ e $P_1 = (S_0, I_0, 0, 1, 0, 0)$. Procuramos, no diagrama de fase dado pela equação acima, uma trajetória saindo do ponto P_0 , e ligando este ao ponto P_1 . Não podemos permitir aqui oscilações entorno de qualquer um dos pontos, pois ambos tem coordenadas zero, e isto implicaria em populações negativas. Estamos procurando então ondas viajantes que obedeçam as condições:

$$S(-\infty) = 1, \quad S(\infty) = S_0$$

$$I(-\infty) = 0, \quad I(\infty) = I_0$$

$$N(-\infty) = 1, \quad N(\infty) = 0$$

$$P(-\infty) = 0, \quad P(\infty) = 1$$

vide fig (7).

Analizamos a estabilidade linear do sistema nos pontos críticos de nosso interesse, para determinar as condições de ondas viajantes. A matriz no ponto: $(1, 0, 1, 0, 0, 0)$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{c} & -\frac{1}{c} & 0 & -\frac{a}{c} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{c} & 0 & \frac{a}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & \lambda & \lambda & c & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Os autovalores desta matriz são:

$$x_1 = -\frac{1}{c}$$

$$x_{2,3} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 4\lambda}}{2}$$

e as raízes do polinômio

$$p(x) := x^3 + \left(\frac{\eta}{c} - c\right)x^2 - \eta x + \frac{ab}{c}$$

Este polinômio tem valores máximo e mínimo em

$$x_{min,max} = \frac{(c^2 - \eta)}{3c} \pm \frac{\sqrt{(c^2 - \eta)^2 + 4\eta c^2}}{3c}$$

Como $P(0) = \frac{ab}{c} > 0$ e $P'(0) = -\eta < 0$ os gráficos possíveis do polinômio são os que temos nas figuras (2), (3), (4).

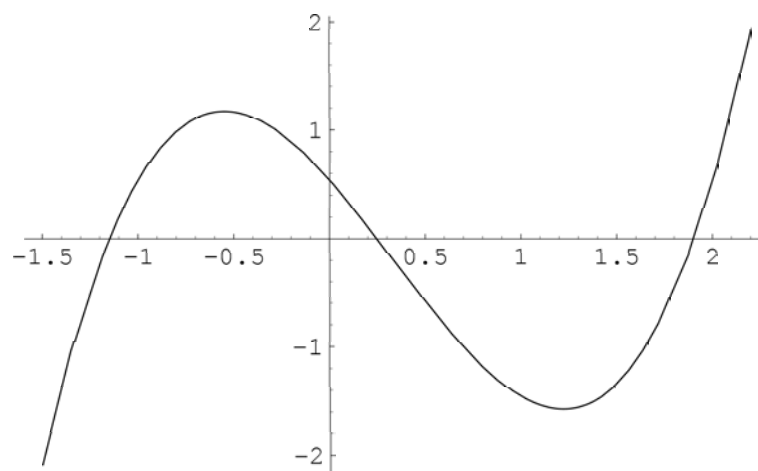


Figura 2: Gráfico do polinômio sem nenhuma raiz complexa

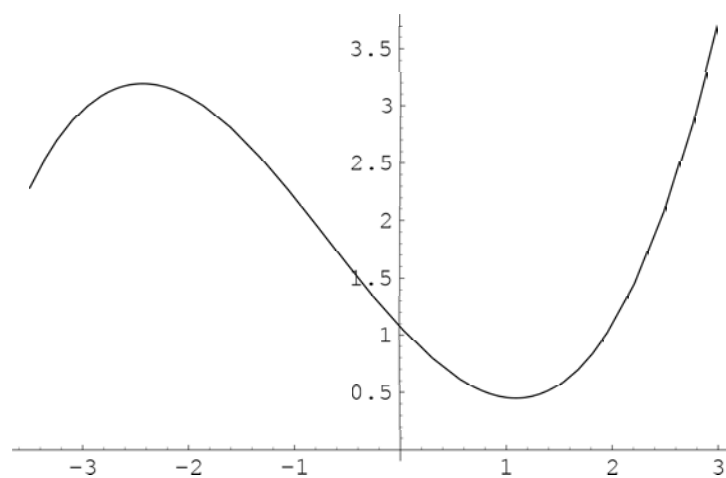


Figura 3: Gráfico do polinômio com duas raízes complexas

No diagrama de fase não podemos ter autovalores complexos pois estes implicam soluções espiraladas em torno de E_2 , que atingiriam valores negativos, o que não é permitido, uma vez que as variáveis são populações. Então o polinômio não pode ter soluções complexas.

Isto nos dá a condição de velocidade mínima, que de acordo com o argumento de Fisher é o que nos fornece a solução estável. O mínimo é dado quando temos uma raiz dupla como no gráfico da figura 4.

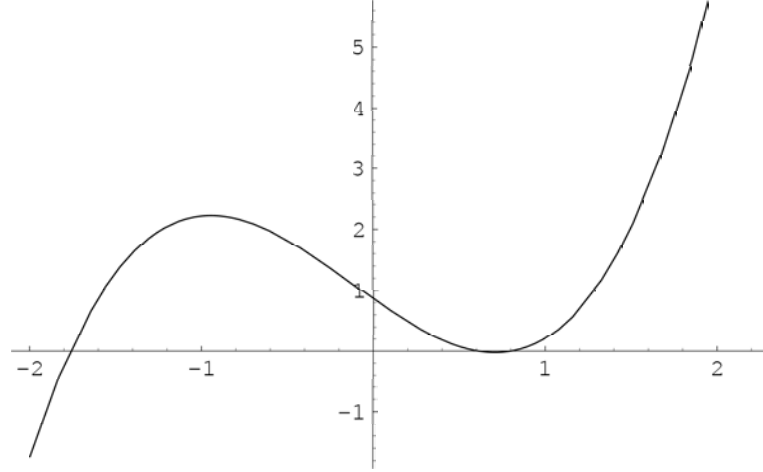


Figura 4: Gráfico do polinômio com raiz dupla. Nestas condições obtemos a velocidade mínima

Por ser necessária a existência de raiz dupla obtemos a equação:

$$P(x_{min}) = P'(x_{min}) = 0$$

$$p(x_{min}) = x_{min}^3 + \left(\frac{\eta}{c} - c\right)x_{min}^2 - \eta x_{min} + \frac{ab}{c} = 0$$

$$x_{min} = \frac{(c^2 - \eta)}{3c} + \frac{\sqrt{(c^2 - \eta)^2 + 4\eta c^2}}{3c}$$

Esta é equação que determina c_{min} . Podemos encontrar, por exemplo, a velocidade da propagação da doença em função de a ou b . Notemos que temos para eles o mesmo comportamento, pois a equação é simétrica quando mudamos a por b . Isto significa que as taxas de contágio tem o mesmo peso na propagação da doença (gráfico na figura 5). Este gráfico é importante, pois determina o peso da taxa de contágio na velocidade de propagação da doença.

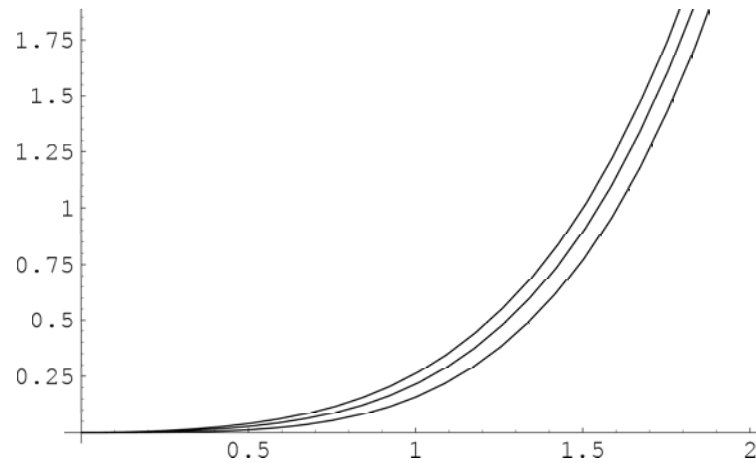


Figura 5: Gráfico da relação entre o produto das taxas de infecção e a velocidade para distintos valores de η . No sentido crescente $\eta = 0.06, 0.3, 0.6$. $a = 1$ ou $b = 1$

A matriz no ponto: $(S_0, I_0, 0, 1, 0, 0)$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1-2S_0-I_0-a}{c} & -\frac{S_0}{c} & 0 & -\frac{aS_0}{c} & 0 & 0 \\ \frac{a}{c} & -\frac{\eta}{c} & 0 & \frac{aS_0}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda + bI_0 & \lambda & c & 0 \\ 0 & 0 & -bI_0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Os autovalores desta matriz são:

$$x_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 4\lambda}}{2}$$

$$x_{2,3} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 4bI_0}}{2}$$

$$x_{5,6} = \frac{1 - \eta - 2S_0 - a - I_0 \pm \sqrt{(1 - \eta - 2S_0 - a - I_0)^2 - 4aS_0 + 4\eta(1 - 2S_0 - a - I_0)}}{2c}.$$

Não temos neste ponto nenhuma condição para a velocidade pois $c^2 + 4bI_0 > 0$ e $c^2 + 4\lambda > 0$

Temos a condição:

$$(1 - \eta - 2S_0 - a - I_0)^2 - 4aS_0 + 4\eta(1 - 2S_0 - a - I_0) > 0. \quad (26)$$

que ocorre para $a \ll 1$, pois não podemos permitir neste ponto possíveis soluções oscilatorias, o que implicaria na existência de populações negativas, neste caso só para os insetos não portadores. Na figura (6) podemos observar a variação desta condição para diferentes valores de a com $\eta = 0.06$ fixo.

Na figura 7 mostramos a simulação numerica com o Software Matlab para os seguintes parâmetros:

$$a = 0.03, \eta = 0.06, b = 0.1, \lambda = 0.05, c = 12.$$

Notemos que para estes parâmetros temos,

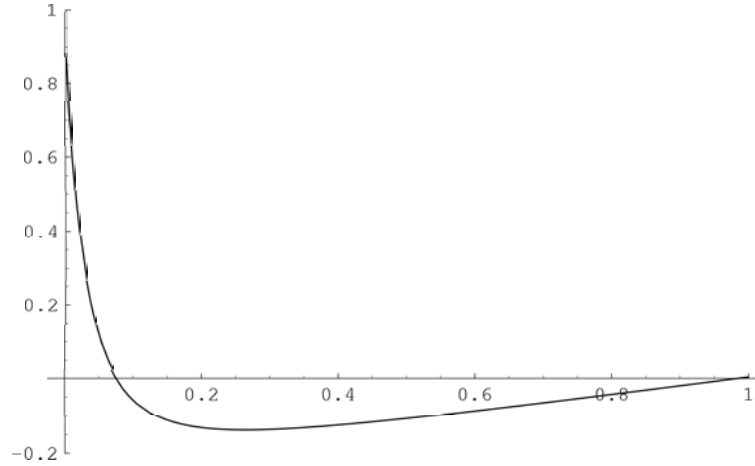


Figura 6: Gráfico da condição de oscilação em função da taxa de contágio das capivaras a , para $\eta = 0.06$

$$S_0 = 0.6466, I_0 = 0.3233, \quad (27)$$

calculados com (13). Neste caso vemos que a frente de onda de insetos portadores vai na frente das capivaras infetadas. Quando a frente de portadores atinge os não portadores, a densidade destes ultimos começa diminuir até se extinguir (o modelo é simples).

Quando a frente de onda das capivaras infetadas atinge as sadias, vemos que acontece o mesmo fenômeno: a densidade das sadias começa a diminuir até ficar no valor $S_0 = 0.6466$, e as infetadas ficam no valor $I_0 = 0.3233$. Estes valores que aparecem na simulação numérica são os correspondentes aos calculados (27) para estes parâmetros. O valor de c alto é para melhorar o desenho na simulação pois a curva fica muito estreita para valores mais baixos, mas mantém o comportamento.

Na figura (8) os parâmetros são os mesmos que na figura anterior, com exceção do valor de a , na figura anterior era $a = 0.03 < 0.07$, e agora $a = 0.4$. Este valor é maior que $a_{critico} = 0.07$, onde muda de sinal a condição (26), sendo neste caso negativa. Ver também o gráfico (6) onde se pode observar a negatividade.

Isto implica que a solução oscila em torno do ponto de chegada, provocando a solução cíclica nas proximidades de zero para os não portadores, o qual não podemos permitir neste modelo simples, mas sim no modelo geral, no proximo capítulo. A vantagem aqui é que podemos calcular o valor da taxa de infecção a partir do qual esta oscilação começa.

Na figura (9) vemos o caso extremo quando $a = 1$. Neste caso, dos pontos de coexistência calculados anteriormente, (13), temos $S_0 = I_0 = 0$, o que implica a extinção das capivaras. Na simulação numérica vemos como a frente das capivaras infetadas atinge as sadias, a densidade populacional destas ultimas começa a decrescer até a extinção.

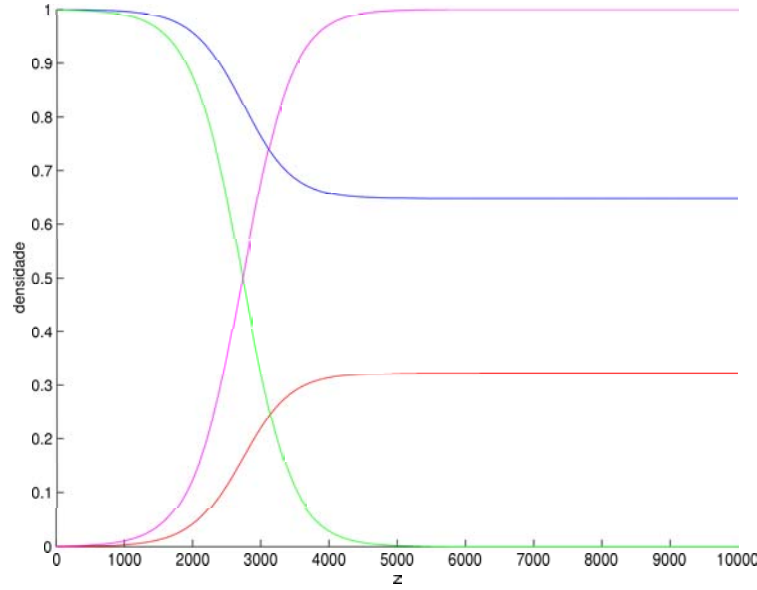


Figura 7: Ondas viajantes de invasão para os seguintes parâmetros: $a = 0.03$, $\eta = 0.06$, $b = 0.1$, $\lambda = 0.05$, $c = 12$. A onda liga os pontos de equilíbrio $(1, 0, 1, 0)$ e $(0.6466, 0.3233, 0, 1)$

Quando as capivaras sadias são extintas, a densidade populacional das infetadas, começa a decrescer também até a extinção. Só ficam os insetos portadores neste caso.

Neste trabalho estudamos um modelo para a propagação de uma doença de transmissão indireta. A velocidade de propagação da doença foi determinada em função dos parâmetros essenciais. Neste modelo simples utilizamos como parâmetros a taxa de contágio das capivaras a , e dos insetos b . A equação que determina a velocidade mínima de propagação é simétrica com respeito às taxas. Isto significa que a influencia de ambas é a mesma.

No gráfico 5 temos a variação de qualquer uma destas duas taxas em função da propagação, para três valores diferentes de η . Quanto maior a mortalidade η , das capivaras infetadas, mais lenta a propagação. As capivaras morrem mais rápido e não se propaga rapidamente a doença.

A vantagem deste modelo simples é que podemos fazer todos os cálculos analíticos no ponto de equilíbrio não trivial, $(S_0, I_0, 0, 1, 0, 0)$ e obtemos, por exemplo, a condição de oscilação (26). O gráfico desta condição em função de a para o valor $\eta = 0.06$ pode ser observado na figura 6, o que facilita a interpretação. Na região onde a função é negativa indica valores de a onde a onda oscila em torno de $(S_0, I_0, 0, 1, 0, 0)$, mas como aqui $N = 0$, teremos população negativa.

No gráfico 7 vemos que isto acontece para o valor $a = 0.4$, e não é uma onda biologicamente aceitável. Na região onde a função é positiva podemos admitir onda viajante,

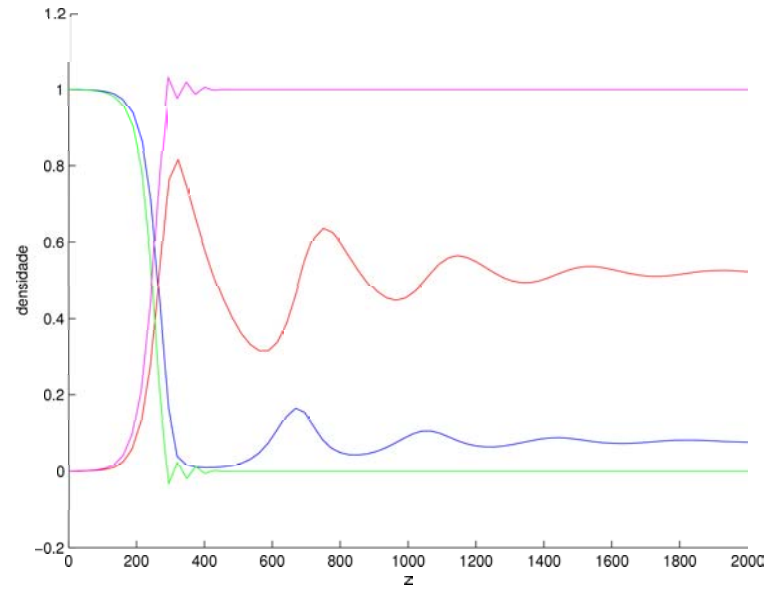


Figura 8: Ondas viajantes de invasão para os seguintes parâmetros: $a = 0.4$, $\eta = 0.06$, $b = 0.1$, $\lambda = 0.05$, $c = 12$. Aqui o valor de $a > 0.07$, então a condição (26) fica menor que zero, vide (fig 6), gerando ondas cíclicas. Não podemos admitir, neste modelo simples, este tipo de solução, pois a curva da população de insetos não portadores gira em torno do zero.

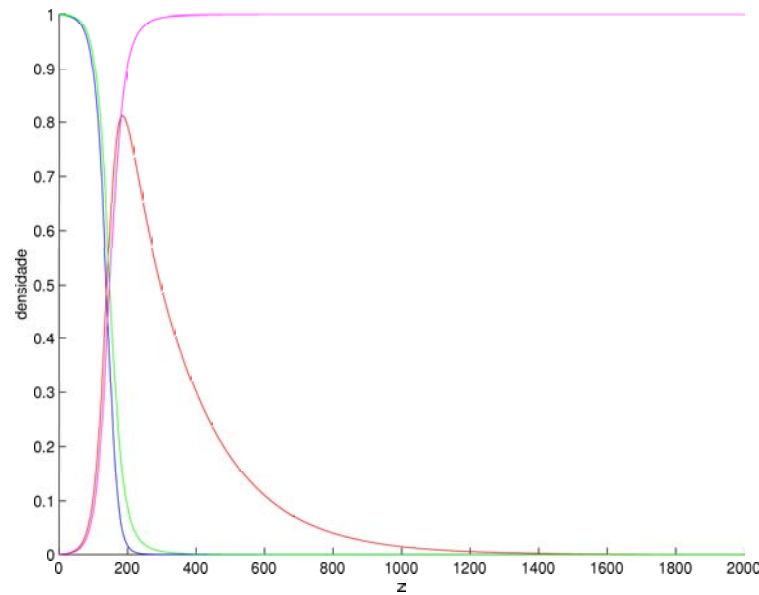


Figura 9: Ondas viajantes de invasão para os seguintes parâmetros: $a = 1$, $\eta = 0.06$, $b = 0.5$, $\lambda = 0.05$, $c = 12$. Observamos aqui a extinção das capivaras

por exemplo para $a = 0.03$, vide 8 para a onda viajante. Para o caso extremo $a = 1$ temos de (13): $S_0 = I_0 = 0$, a extinção das capivaras. A onda viajante correspondente a este caso pode ser observada na figura 9.

Este modelo simples tem então a vantagem de ser muito didático, onde tudo pode ser calculado analiticamente. Mas o modelo geral, vide [5], a pesar de não possibilitar o cálculo em forma analítica no ponto não trivial, reflete melhor a realidade. Nele podemos considerar as ondas cíclicas de propagação da doença, que é como ocorre na realidade.

Referências

- [1] Fisher, R.A. (1937). The wave of advance of advantageous genes. *Ann. Eugenics* **7**, 353-369.
- [2] Murray, J.D. (1989). *Mathematical Biology*. Springer-Verlag, Berlin.
- [3] Murray, J.D., Stanley, E.A., Brown, D.L. (1986). On the Spatial Spread of Rabies Foxes. *Proc.R.Soc.Lond.* **B229**, 111-150.
- [4] Pregolatto, S. de A. (2002). O mal-das-cadeiras em capivaras: estudo, modelagem e simulação de um caso. Tese de doutorado em biomatemática, BAE-UNICAMP.
- [5] Maidana, N.A. (2004). Algumas aplicações das ondas viajantes a fenômenos biológicos. Tese de doutorado em biomatemática, IMECC-UNICAMP.